# π

ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ

ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ

ಕನ್ನಡ ಸಂಘ

ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್ ಬೆಂಗಳೂರು ೫೬೦೦೨೯

π by H. R. Krishnamurthy, Department of Physics, National College, Jayanagar Bangalore-560011, Published by Kannada Sangha Christ College, Hosur Road, Bangalore-560029. Printed at Vikasa Printers, South End Road, Bangalore-560004.

Pages 52 + viii First Impression January 1976



ಚಿತ್ರಗಳು : ಬಿ. ಎಸ್. ರಾಜಾರಾಂ

*Sole Selling Agents* :

The Bangalore Printing & Publishing Co. Ltd.
Post Box No. 1807
88, Mysore Road, Bangalore-560018

Phone Nos. Office : 61635 Show Room : 75442

ಬೆಲೆ : ಐದು ರೂಪಾಯಿ (ಸಾಮಾನ್ಯ)
ಹತ್ತು ರೂಪಾಯಿ (ಕ್ಯಾಲಿಕೊ)

ಮುದ್ರಕರು :
ಶೇಷನಾರಾಯಣ
ವಿಕಾಸ ಮುದ್ರಣ
ಸೌತ್ ಎಂಡ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು ೫೬೦೦೦೪

ಶ್ರೀ ಸಿ. ಕೆ. ಲಕ್ಷ್ಮಣಗೌಡ ಸ್ಮಾರಕ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ-೪

ಸಂಪಾದಕ: ಚಿ. ಶ್ರೀನಿವಾಸರಾಜು

ಸಮರ್ಪಣೆ

ಶ್ರೀ ಬೆಳ್ಳಾವೆ ವೆಂಕಟನಾರಣಪ್ಪ

ಕನ್ನಡ ಸಂಘ ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್ ಬೆಂಗಳೂರು

# ಮುನ್ನುಡಿ

ಪುಸ್ತಕಗಳಿಂದ ಬರುವ ಜ್ಞಾನ ದೊಡ್ಡದು. ಜನತೆಯ ಆಲೋಚನೆ, ಅನುಭವ, ಜನಾಂಗಗಳಿಂದ ಜನಾಂಗಗಳಿಗೆ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಮೂಲಕ ಹರಿದುಬಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂದು ಮಾನವನ ಅತ್ಯಮೂಲ್ಯ ಆಸ್ತಿ ಪುಸ್ತಕಗಳು. ಇಂದು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಕರ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ತವ್ಯವೆಂದರೆ ಈ ಜ್ಞಾನಧಾರೆಯನ್ನು ಯುವಜನಾಂಗಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ ತಿಳಿಸುವುದು.

ನಮ್ಮ ಕಾಲೇಜಿನ ಕನ್ನಡ ಸಂಘದ ಕಾರ್ಯ ಯುವಜನಾಂಗಕ್ಕೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯಲೆಂದು ಪ್ರಾರ್ಥಿಸುತ್ತೇನೆ. ಗುಣದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಪುಸ್ತಕಗಳು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಲಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಒಳ್ಳೆಯ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭ ಮಾಡಿದ ಕನ್ನಡ ಸಂಘಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಸಹಕರಿಸಿ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದವರಿಗೆ ನಾನು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭಿನಂದಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್
ಬೆಂಗಳೂರು-೫೬೦೦೨೯

ರೆ॥ ಫಾ॥ ಮಾಣಿಗೈಲ್ಸ್
ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಾಲರು

# ಅರಿಕೆ

ನಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ಸಂಘ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಜನಪ್ರಿಯಗೊಳಿಸಬೇಕೆನ್ನುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿರುವ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕ ಇದು. ಆಧುನಿಕ ಜಗತ್ತಿನ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಪರಂಪರಾನುಗತವಾಗಿ ಬಂದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು, ಜೀವನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಊಹೆಗೂ ಮೀರಿ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದುದು ಅನಿವಾರ್ಯ. ಇಂದಿನ ಲೇಖಕರು ವಿಜ್ಞಾನದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಸಾಹಿತ್ಯ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಓದುವುದು ಬರೆಯುವುದು, ಸಾಹಿತ್ಯವನ್ನು ಓದುವುದು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ ಶ್ರಮ. ಈ ರೀತಿಯ ಬರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಪ್ರಯೋಗಾವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿದ್ದೇವೆ. ಮಿತ್ರ ಶ್ರೀ ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ ಈಗಾಗಲೇ ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿ ಪ್ರಸಿದ್ಧರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಮತ್ತು ಕನ್ನಡ ಸಂಘದ ಮೊದಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗ್ರಂಥವಾದ ಇದನ್ನು ಸಂಘ ಸಂತೋಷದಿಂದ, ಕೃತಜ್ಞತೆಯಿಂದ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ.

'ವಿಜ್ಞಾನ' ಎಂಬ ಮಾಸಪತ್ರಿಕೆಯ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕರಾಗಿ, ಹನ್ನೆರಡು ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಸೆಂಟ್ರಲ್ ಕಾಲೇಜ್ ಕರ್ಣಾಟಕ ಸಂಘದ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾಗಿ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿ, ಕರ್ಣಾಟಕ ಸಾಹಿತ್ಯ ಪರಿಷತ್ತಿನ ಸಂಸ್ಥಾಪಕರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಾದ ಕೀರ್ತಿಶೇಷ ಶ್ರೀ ಬೆಳ್ಳಾವೆ ವೆಂಕಟನಾರಣಪ್ಪನವರಿಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಸಮರ್ಪಣೆ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಮುಂಗಡ ಕೂಪನ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ನೆರವಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರ ಶ್ರೀ ಎ. ಶ್ರೀನಿವಾಸಶೆಟ್ಟಿ, ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೀ ಶೇಷನಾರಾಯಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟಣೆಯ ಕಾರ್ಯಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರವಿತ್ತ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಯ ವಂದನೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

೧೭-೨-೧೯೭೬
ಕನ್ನಡ ಸಂಘ
ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್, ಬೆಂಗಳೂರು

ಚಿ. ಶ್ರೀನಿವಾಸರಾಜು

# ಎರಡು ಮಾತು

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಜಾಮಿತಿಯ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವ "$\pi$" ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೊದಲ ಪಾಠಗಳ ಪರಿಚಯವಿರುವವರಿಗೆ ಇದು ಹೊರತಲ್ಲವಾದರೂ, ಅದರ ದೀರ್ಘ ಇತಿಹಾಸ, ವ್ಯಾಪಕತೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗೋಚರವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ '$\pi$' ಬಗ್ಗೆ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಸ್ತುವನ್ನೆಲ್ಲ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಪುಸ್ತಕರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀಡುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರೇರೇಪಿಸಿದವರು, ಅದರ ಪ್ರಕಟಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಸೀಮ ಉತ್ಸಾಹ, ಅಸಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದವರು ಗೆಳೆಯ ಶ್ರೀ ಟಿ. ಶ್ರೀನಿವಾಸರಾಜು ಅವರು. ಅವರಿಗೆ, ಕನ್ನಡ ಸಂಘ ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕದ ರಚನೆಯ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಸಲಹೆ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಮಿತ್ರರಿಗೆ ವಂದನೆಗಳು

**ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ**

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗ
ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜು
ಜಯನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು–೫೬೦೦೧೧

# ಪರಿವಿಡಿ

ಸಲಹೆ–ಸಹಾಯಂ–ಸಹಕಾರ

ರೆ॥ ಫಾ॥ ಮಾಣೆಗೈಲ್ಸ್
ಎಚ್. ಆರ್. ರಾಮಕೃಷ್ಣರಾವ್
ಎಚ್. ಡಿ. ಎಸ್. ಕೆ. ಶಾಸ್ತ್ರಿ
ಡಿ. ವಿ. ರಾಜಶೇಖರ್
ಎ. ಶ್ರೀನಿವಾಸಶೆಟ್ಟಿ
ಮತ್ತು
ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

# ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಪ್ರಕೃತಿ ಅಪರಿಮಿತ ರಹಸ್ಯಗಳ ತವರು. ಈ ರಹಸ್ಯಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಅನಾದಿ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಮಾನವನಿಗೆ ಒಂದು ಸವಾಲು. ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ, ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂತಸ ಅಪಾರವಾದದ್ದು. ಪ್ರಕೃತಿಯ ಹಲವಾರು ಮುಖಗಳನ್ನು ಕಂಡ ಆದಿಮಾನವ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಹೆದರಿದ್ದಿರಬಹುದಾದರೂ ಕಾಲಕಳೆದಂತೆ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ, ಅರ್ಥವಾಗದುದನ್ನು ಗೌರವಿಸುವ ಮನೋಭಾವದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಐದು ಸಾವಿರ ವರುಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಯೂಫ್ರೇಟಿಸ್–ಟೈಗ್ರಿಸ್ ನದಿ ಬಯಲಿನಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯರು, ಅನೇಕ ವರುಷ ಕಾಲ ನಡೆಸಿದ ಖಗೋಳ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಫಲವಾಗಿ ಅರಿತ ಸತ್ಯಗಳ ಕ್ರೋಢೀಕರಣದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ, ನಿಯಮಬದ್ಧ ವಿಜ್ಞಾನದ ಅಧ್ಯಯನ ಇಂದು ಶತಸಹಸ್ರವಾಗಿ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ದಂಗುಬಡಿಸುವಂತೆ ಬೆಳೆದಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಖಗೋಳ ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ವ್ಯೋಮ ಅನ್ವೇಷಣೆಯವರೆಗಿನ ಹಾದಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಷ್ಟತರವಾದುದು. ಅಸಂಖ್ಯ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ, ದಾರ್ಶನಿಕರ ಜ್ವಲಂತ ಪ್ರತಿಭೆಯ ಫಲವಾಗಿ, ಕೆಚ್ಚೆದೆಯ, ಬಿಚ್ಚುಮಾತಿನ ತರ್ಕಬದ್ಧ ಮನೋಭಾವದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಅಸೀಮ ಧೈರ್ಯಸಾಹಸಗಳ ಫಲವಾಗಿ ದಿಗಂತದೆತ್ತರಕ್ಕೂ ವ್ಯಾಪಿಸಿರುವ ಅಪಾರ ಜ್ಞಾನರಾಶಿ ಇಂದು ಮನುಕುಲದ ಅಮೂಲ್ಯ ಆಸ್ತಿ. ಶತಶತಮಾನಗಳಿಂದ ಹರಿದುಬಂದಿರುವ ಈ ಜ್ಞಾನಸಂಪತ್ತಿನ ನೆರವಿನಿಂದ ಮಾನವ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪ್ರಗತಿ ಅಪಾರ. ಅತಿಸೂಕ್ಷ್ಮ ಅಣುವಿನಿಂದ ಪ್ರಚಂಡ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಲ್ಲ ; ಚಂದ್ರನತ್ತ, ಇತರ ಗ್ರಹಗಳತ್ತ ಅನಾಯಾಸವಾಗಿ ಈಸಬಲ್ಲ ; ಜಗತ್ತಿನ ಅತಿ ದೂರದ ಪ್ರದೇಶಗಳೊಡನೆ ಕ್ಷಣಮಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲ ; ಕೋಟ್ಯಾನುಕೋಟಿ ಮೈಲಿಗಳ

ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ನಭೋಮಂಡಲದ ಕಾಯಗಳನ್ನು ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಲಕರಣೆಗಳಿಂದ ನೋಡಬಲ್ಲ; ಕಡೆಗೆ ಮುಪ್ಪನ್ನೂ ದೂರಮಾಡಬಲ್ಲ. ಪ್ರಕೃತಿಯ ನಿಯಮಬದ್ಧ ವ್ಯಾಪಾರಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದ ನಮಗೆ ಆಗುತ್ತಿರುವ ಲಾಭ ಅಪರಿಮಿತ. ಈ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಗತಿಪರ ಅಧ್ಯಯನಗಳ ಹಿಂದೆ ಇರುವ ವಿಜ್ಞಾನಿಯ ಕಲ್ಪನೆ ಅಸಾಧಾರಣವಾದುದು. ವಿಜ್ಞಾನಿಯ ಪ್ರಚಂಡ ಕಲ್ಪನಾಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಶತಸಹಸ್ರ ಪಾಲಿನಷ್ಟು ಅಧಿಕಗೊಳಿಸಿ, ನಿಶಿತಗೊಳಿಸುವ ಅಪೂರ್ವ ಸಾಧನ–ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ರಾಣಿ–ಎನಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ.

"ಎಲ್ಲ ವಿಶೇಷಣಗಳೂ ಅಳತೆಗೆ ಸಿಗುವ ಗುಣವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿವೆ. ಆದುದ ರಿಂದ ಎಲ್ಲ ತರ್ಕವೂ ಗಣಿತದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ" ಎಂಬ ಸತ್ಯವನ್ನು ಮನ ಗಂಡಿದ್ದ ರೋಜರ್ ಬೇಕನ್ (1214–1295) ವಿಜ್ಞಾನದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ತರ್ಕದ ಗಣಿತದ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದ್ದ. ಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ಸಾಧನವಾದ ತರ್ಕ ಎಲ್ಲ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಿಗೂ ಮೂಲ ಸಾಧನ ಎನ್ನುವುದೂ ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪುವ ಮಾತು ಜ್ಞಾನ ಗಂಗೋತ್ರಿ; ಭೌತಜಗತ್ತು : "ಆಕಾಶ, ವಾತಾವರಣ,ಭೂಮಿ, ಸಾಗರ, ವಸ್ತು-ಚೈತನ್ಯ, ಅಣು-ಪರಮಾಣು, ರಾಸಾಯನಿಕ ಕ್ರಿಯೆ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ — ಇವುಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಕೀಲಿಗೈ ಗಣಿತ". ಪ್ರಯೋಗ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಲಾರದ ಹಲವಾರು ಸಿದ್ಧಾಂತ ಗಳನ್ನು, ತತ್ವಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಕಲ್ಪನೆಯ ಬಲದಿಂದಲೇ ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲ ಶಕ್ತಿಯಿರುವ ಅತ್ಯಮೂಲ್ಯ ಆಸ್ತಿಯಾದ ಈ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ನಿಯಮಬದ್ಧ ತತ್ವಗಳ ಗಣಿ, ಅಸಾಧಾರಣ ನಿಖರತೆಯ ಖನಿ.

'ಜ್ಯಾಮಿತಿ' ಇಂತಹ ಪ್ರಚಂಡ ನಿಖರತೆಯುಳ್ಳ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಭಾಗ. ನಾಲ್ಕು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಹಿಂದಿನಿಂದ ಬೆಳೆದುಬಂದಿರುವ ಈ ವಿಭಾಗದ ಉದ್ಭವ–ಆದಿಮಾನವ ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡ ಹಲವಾರು ಆಕಾರಗಳ ಫಲ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 2900 ರಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ 'ಗಿಜೆ' ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಅಲ್ಲಿನ ಜನರಿಗೆ ಘನ ಅಳತೆ, ಗೋಡೆಯ ಆಕಾರದ ರೇಖಾಗಣಿತ ಜ್ಞಾನ ಇರುವುದು ಇತಿಹಾಸಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಬಿಂದುಗಳು, ರೇಖೆಗಳು, ಕೋನಗಳು, ಘನ ಆಕೃತಿಗಳು–ಇವುಗಳ ಗುಣಗಳು, ಅಳತೆಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟ ವಿಷಯಗಳು. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 2000–1600ರ ವರೆಗಿನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯರು ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಗಾತ್ರಗಳ ಅಳತೆ ಯಲ್ಲಿ ಪರಿಣಿತರಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯರ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಸಂಬಂಧ ಪಟ್ಟ ಕೆಲವು ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಅವರಿಗೆ ಆಯತಗಳ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅಳತೆಯ ಕಲೆ ಹಸ್ತಗತವಾಗಿದ್ದಿರಬೇಕೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಬರುತ್ತದೆ. ನಿಯಮಿತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಚಚ್ಚೌಕ, ವೃತ್ತ, ಅರ್ಧವೃತ್ತ ಮೊದಲಾದ ರೇಖಾಕೃತಿಗಳ

ರಚನೆಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಸೂತ್ರಗಳು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 800 ರಿಂದ 500ರ ವರೆಗಿನ ಭಾರತದ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಬೋಧಾಯನ, ಅಪಸ್ತಂಭ, ಕಾತ್ಯಾಯನರ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಗ್ರೀಕ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಪೈಥೋಗೊರಸನ ಶಿಷ್ಯನಾದ ಪ್ಲೇಟೋ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಳವಾದ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ, ಬೋಧನೆಗೆ ಶ್ರಮಿಸಿದ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ. ಸಮಕಾಲೀನ ಸಮಾಜದ ಬುದ್ಧಿಜೀವಿಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಮನರಂಜನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಿದ ಕೀರ್ತಿ ಪ್ಲೇಟೋಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಅಸಾಧಾರಣ ಕಲ್ಪನೆಯಿಂದ, ಪ್ರತಿಭೆಯಿಂದ ಎದ್ದು ತೋರುವ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಗಣಿತಜ್ಞನೆಂದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ (ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300). ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡರ್ ಚಕ್ರವರ್ತಿ ಈಜಿಪ್ಟನ್ನು ಗೆದ್ದನಂತರ ಕಟ್ಟಿಸಿದ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯ ನಗರ ಈ ವಿದ್ವಾಂಸನ ನೆಲೆ. ಅಲೆಗ್ಸಾಂಡ್ರಿಯ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕನಾಗಿದ್ದ ಈತ ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸ ಗಣನೀಯವಾದದ್ದು, ತೂಕವುಳ್ಳದ್ದು. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300ರ ವರೆಗೂ ಬೆಳೆದುಬಂದಿದ್ದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿವಿಧ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ, ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಮುಂದಿನ ಜನಾಂಗಕ್ಕೆ ಅಪಾರ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ತನ್ನ ಸ್ವಂತ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನೂ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ. "The Elements" ಎಂಬ ಆತನ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಆವರೆಗಿನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಿಹಾಸದ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ವಿವರ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಅನೇಕ. ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಹಗಲಿರುಳೂ ಶ್ರಮಿಸಿದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಖಿಲಿಸ್–ಆಮೆ ಸಮಸ್ಯೆ (ಕ್ರಿ. ಪೂ. 450ರಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಗ್ರೀಕ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ ಜೀನೋನಿಂದ ವಿರಚಿತವಾದದ್ದು), ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್‌ಷಾಂಡಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಮುಖ್ಯವಾದವು. ಆದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ "The Elements" ನಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದು ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ತಲೆ ಚಿಟ್ಟು ಹಿಡಿಸಿದಷ್ಟು ಮತ್ತಾವುದೂ ಇಲ್ಲ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಹಿಂದಿನಿಂದ ಬೆಳೆದು ಬಂದ ಭಾವನೆಯಂತೆ, ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯ ರೇಖಾಕೃತಿಯು ರಚನೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸ ಬಹುದಾದ ಪ್ರಮುಖ ಸಲಕರಣೆಗಳೆಂದರೆ ಕೈವಾರ ಹಾಗೂ ನೇರವಾದ ಅಂಚು ಇಂತಹ ಉಪಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪರಿಹಾರ ಅಸಾಧ್ಯವೆನಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರಚನೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡವು ಮುಖ್ಯವಾದವುಗಳು.

(ಅ) ಕೊಟ್ಟ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಷ್ಟೇ ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು.

(ಆ) ಕೊಟ್ಟ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದದಷ್ಟೇ ಇರುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು.

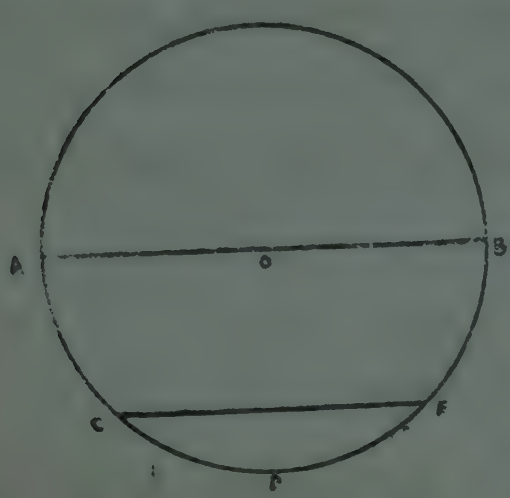
(ಇ) ಕೊಟ್ಟ ಕೋನವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.

(ಈ) ಕೊಟ್ಟ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎರಡರಷ್ಟು ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಘನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ಮಹಾಯುದ್ಧದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅಮೆರಿಕಾದ ನೌಕಾದಳ "ಸಮುದ್ರದ ಜೇನು" (Sea bees) ಎಂಬ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ರಕ್ಷಣಾ-ರಚನಾದಳವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿತು. ಲೆಕ್ಕವಿಲ್ಲದಷ್ಟು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾದ, ಅತ್ಯಂತ ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯವಾದ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಈ ದಳದ ಧ್ಯೇಯವಾಕ್ಯ "ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಈಗಲೇ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ, ಅಸಾಧ್ಯವಾದುದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ತಡೆದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ." ಹೆಸರಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ದಂಗು ಬಡಿಸುವಂತಹ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ಇಂತಹ ದಳಕ್ಕೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವರ ಘೋಷಣೆ, ಅಸಾಧ್ಯ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಯ ಕೀರ್ತಿ ಎಲ್ಲವೂ ಹಾರಿಹೋಗುತ್ತಿದ್ದಿತು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿ ಎರಡು ಸಾವಿರಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ವರುಷಗಳಾದರೂ ಇಂದಿಗೂ, ಅದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿದನಂತರವೂ ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಲೇ ಇದೆ. "ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರ ನನಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಪರಿಹಾರದ ರಹಸ್ಯವನ್ನು ಜಗತ್ತಿನಿಂದ ರಕ್ಷಿಸಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದೇನೆ. ಅಪಾರ ಹಣ ಕೊಟ್ಟರೆ ಮಾತ್ರ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತೇನೆ" ಎಂಬ ಪ್ರಕಟನೆಗಳು ಇಂದಿಗೂ ಪ್ರಪಂಚದ ಹಲವಾರು ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಾಗ ಬರುತ್ತದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಹಲವಾರು ಸುಲಭ ಪಾಠಗಳ ಪರಿಚಯವಿರುವ ಯಾವ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾದರೂ ಇತಹ ಪ್ರಕಟನೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಹಾರ್ದಿಕವಾಗಿ ನಗದೇ ಇರಲಾರ. ಆದರೆ ಇಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರ ಅಷ್ಟೊಂದು ಕಷ್ಟವೇ, ಅಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂದೇಹ ಯಾರಲ್ಲಿಯೂ ಮೂಡದೇ ಇರಲಾರದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವೇ ಇಲ್ಲವೆ ? ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಏಕಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮೂಡುವುದು ಅತ್ಯಂತ ಸಹಜ. ಶತಮಾನಗಳಿಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರ, ಇತರ ಆಸಕ್ತ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ತಲೆ ತಿನ್ನುತ್ತಿರುವ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ, ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ, ಅದರ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುವ ಅಪಾರ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ವಿವೇಚನೆ ಮುಂದಿನ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿದೆ.

# II

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಸಂವೃತ ವಕ್ರರೇಖೆಯೊಂದರಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ನಿಯಮಬದ್ಧ ಆಕೃತಿ ವೃತ್ತ. ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸುತ್ತಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಒಳಗಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮದೂರವನ್ನು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವೃತ್ತದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕವಾಗಿ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆ ವ್ಯಾಸ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೆಸರು ಪರಿಧಿ. ವೃತ್ತಖಂಡ ಅಥವಾ ಕಂಸ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.




O — ಕೇಂದ್ರ

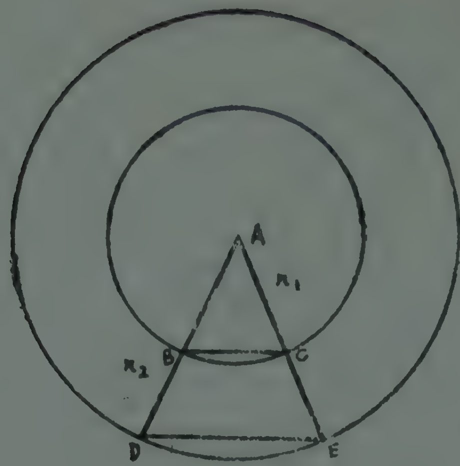
OA = OB = ತ್ರಿಜ್ಯ

AOB = ವ್ಯಾಸ

CE = ಜ್ಯಾ

CDE = ಕಂಸ

ಚಿತ್ರ : 1




ಚಿತ್ರ : 2

‘A’ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ, $r_1$ ಮತ್ತು $r_2$ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳತ್ತ ಗಮನ ಹರಿಸೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು B ಮತ್ತು D ಹಾಗೂ C ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 2). BC ಮತ್ತು DE ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಎರಡು ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿಸುತ್ತವೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸುಲಭ ಪ್ರಮೇಯವೊಂದರಿಂದ BAC ಮತ್ತು DAE ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಾದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಸಾದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

$$\frac{BC}{BA} = \frac{DE}{DA}$$

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಅನೇಕ ಕಂಸಗಳನ್ನಾಗಿ ಛೇದಿಸಿ, ಈ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸೋಣ. ಆಗ ನಮಗೆ BC ಮತ್ತು DE ಗಳಂತಹ ಅನೇಕ ಜ್ಯಾಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾದಷ್ಟೂ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತಾ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ x ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜ್ಯಾಗಳಿರಲಿ. ಸಾದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಬಂದಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು, ಮೌಲ್ಯ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲದೆ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{x\,(BC)}{2\,(BA)} = \frac{x\,(DE)}{2\,(DA)}$$

x ಬೆಲೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಂತೆಲ್ಲಾ, ಅಂದರೆ BC ಯಂತಹ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅಧಿಕವಾದಂತೆಲ್ಲಾ, x (BC) ಮತ್ತು x (DE) ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಳಗಿನ ಮತ್ತು ಹೊರಗಿನ ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ 2 (BA) ಮತ್ತು 2 (DA) ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{\text{ಒಳಗಿನ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ}}{\text{ಒಳಗಿನ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ}} = \frac{\text{ಹೊರಗಿನ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ}}{\text{ಹೊರಗಿನ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ}}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವಿನ ದಾಮಾಶಯ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವಿನ ದಾಮಾಶಯದಿಂದ ಬರುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು, ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ ಮಾಲೆಯ "$\pi$"–"ಪೈ" ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಇನ್ನೂ ಹಲವಾರು ದಾಮಾಶಯಗಳಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನು ಕಡೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಅಸಂಖ್ಯ ವಸ್ತುಗಳ ವಿವಿಧ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವೂ ಒಂದು. ದಿನನಿತ್ಯದ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಪರಿಕರಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಆಕಾರ ತೀರಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದುದು. ಅನಾದಿ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಇಂತಹ ಪರಿಕರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತ ಬಂದಿರುವ ಕುಶಲಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ, ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ನಡುವೆಯಿರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಬಂಧದ ಪರಿಚಯವಿರುವುದು ಇತಿಹಾಸದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 5 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಹಿಪೋಕ್ರೇಟ್ಸ್‌ನ ಬರವಣಿಗೆಗಳಿಂದ, ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ, ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ದಾಮಾಶಯ ಎಲ್ಲ ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅಂಶ ತಿಳಿದಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಬಡಗಿಗಳಿಗೆ, ಕಮ್ಮಾರರಿಗೆ, ಇತರ ಲೋಹಗಳ ಕುಶಲಕರ್ಮಿಗಳಿಗೆ, ಸೌಧ, ಕೊಳಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವವರಿಗೆ, ಯಂತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಈ ಸಂಬಂಧದ ಅರಿವಿರುವುದು ನಿಚ್ಚಳವಾಗಿ ತೋರಿಬರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ "ಬೈಬಲ್" ಗ್ರಂಥದ "Kings and Chronicles" ನಲ್ಲಿ "ಸಾಲೋಮನ್ ಚಕ್ರವರ್ತಿ ತನ್ನ ಆಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಬೃಹತ್ ಸ್ನಾನಾಗಾರದ ಪರಿಧಿ ಅದರ ವ್ಯಾಸದ ಮೂರರಷ್ಟಿತ್ತು" ಎಂಬ ನಿರೂಪಣೆಯಿದೆ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆದಾಗ,

$$\frac{\text{ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}} = 3$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಗಣಿತದ ಮೂಲಪಾಠಗಳ ಪರಿಚಯವಿರುವ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ,

ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ದಾಮಾಶಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವ 'ಪೈ'ನ ಬೆಲೆ ಸುಮಾರಾಗಿ $\frac{22}{7}$ ಎಂಬುದರ ಪರಿಚಯವಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ 'ಪೈ'ಗೆ ಇದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎಂದಿಗೂ ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 'ಪೈ'ನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನೋಡಿ.

$$\pi = 3.14159265358979323846226433832\,7\,9950288\ldots\ldots$$

ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇದರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನೂ ಒಂದು ಲಕ್ಷ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ಇನ್ನೂ ಕೊನೆ ಮುಟ್ಟಿಲ್ಲ. ಮುಟ್ಟುವುದೂ ಇಲ್ಲ.

ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರಮಾಲೆಯ ಪೈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಗುರುತಿಸಲ್ಪಡುವ ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕಕ್ಕೆ 'ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ನ ಸ್ಥಿರಾಂಕ' ಹಾಗೂ 'ಲ್ಯುಡೋಲ್‌ಫೈನ್ ಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬ ಹೆಸರುಗಳೂ ಇದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪೈನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\frac{22}{7} = 3.14$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಇತಿಹಾಸದ ಪುಟಗಳನ್ನು ತೆರೆದು ನೋಡಿದಾಗ ಪೈಗೆ ಕೊಡತಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ವಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪೈನ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದರೂ ಸಹ ಹಲವಾರು ಕುಶಲಕರ್ಮಿಗಳು ತಮ್ಮ ನೈಪುಣ್ಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಿಗಾಗಿ ಹಲವಾರು ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವು ದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಕ್ರಗಳಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತ ನಾಗಿದ್ದ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಪೈನ ಮೌಲ್ಯ 3.140 ಮತ್ತು 3,142 ರ ನಡುವೆ. ಯಂತ್ರಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತನಾಗಿದ್ದ ಚೀನಾದೇಶದ ಟ್ಸು ಚುಂಗ್ ಚಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಬೆಲೆ 3.1415926 ಮತ್ತು 3.1415927 ಗಳ ನಡುವಿನದು. ಅನೇಕ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು, ಕುಶಲಕರ್ಮಿಗಳು, ಗಣಿತಜ್ಞರು, ಯಂತ್ರ ಶಿಲ್ಪಿಗಳು ಅನಾದಿಕಾಲದಿಂದಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತ ಬಂದಿರುವ ಪೈನ ಹಲವಾರು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಸಂಖ್ಯೆ | ಹೆಸರು | ದೇಶ | ಕಾಲ | ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ 'ಪೈ'ನ ಮೌಲ್ಯ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯರು ಹೀಬ್ರೂಗಳು ಮತ್ತು ಚೀನಾದೇಶದವರು | ಕ್ರಿ.ಪೂ. 1500ಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ | 3 |
| 2 | | ಈಜಿಪ್ಟಿನವರು | ,, 1500 | 3.16 |
| 3 | ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ | ಗ್ರೀಕ್ | ,, 240 | 3.140 ಮತ್ತು 3.142ಗಳ ನಡುವೆ |
| 4 | ಲಿಯುಂಹ್ಸಿಂಗ್ | ಚೀನಾ | ಕ್ರಿ.ಶ. 25 | 3.16 |
| 5 | ಟಾಲ್ಮಿ | ಗ್ರೀಕ್ | ,, 90–168 | 3.1415929 |
| 6 | ವಾಂಗ್ ಫನ್ | ಚೀನಾ | ,, 250 | 3.15 |
| 7 | ಆರ್ಯಭಟ್ಟ | ಹಿಂದೂ | ,, 450 | 3.1416 |
| 8 | ಟ್ಸು ಚಿಂಗ್ ಚ್ಹಿ | ಚೀನಾ | ,, 480 | 3.1415926 ಮತ್ತು 3.1415927 |
| 9 | ಮುಹಮ್ಮದ್ ಇಬ್ನ ಮೂಸ | ಅರಬ್ | [illegible] | $3\frac{1}{7}$ |

| ಸಂಖ್ಯೆ | ಹೆಸರು | ದೇಶ | ಕಾಲ | ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ 'ಪೈ'ನ ಮೌಲ್ಯ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | ಅಲ್‌ಕಾಶಿ | ಅರಬ್ | ಕ್ರಿ.ಶ. 1430 | 3.141592635897932 |
| 11 | ವೀಟಾ | ಫ್ರೆಂಚ್ | ,, 1593 | 3.1415926537 ಮತ್ತು 3.1415926355ಗಳ ನಡುವೆ |
| 12 | ಸ್ಕ್ಯೂಲೆನ್ | ಜರ್ಮನ್ | ,, 1610 | ಅಸಂಖ್ಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ |
| 13 | ವ್ಯಾಲಿಸ್ | ಇಂಗ್ಲಿಷ್ | ,, 1650 | 35 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ |
| 14 | ಗ್ರೆಗೋರಿ | ಇಂಗ್ಲಿಷ್ | ,, 1668 | ಅಸಂಖ್ಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ |
| 15 | ಟಕೆಬೆ | ಜಪಾನ್ | ,, 1690 | ಅಸಂಖ್ಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾವಗಳವರೆಗೆ |
| 16 | ಮಟ್ಸುನಾಗಾ | ಜಪಾನ್ | ,, 1720 | 50 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ |

ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ವಿಶದವಾಗಿ ನೋಡಿದಾಗ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿದ್ದ 'ಪೈ'ನ ಹಲವಾರು ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಇಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ, ನಿಷ್ಕರ್ಷೆಯಾದ ಬೆಲೆ ಯಾವುದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ವಿವಿಧ ಕುಶಲಕರ್ಮಿಗಳು ತಮ್ಮ ಪರಿಕರಗಳ ರಚನೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತ ಬಂದಿದ್ದಾರೆ.

ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ದಾಮಾಶಯವನ್ನು ಪೈ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಅಂಶ. 'ಪೈ'ನ ಸಮಾರಾದ ಮೌಲ್ಯವೂ ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತವೊಂದರ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ನಮಗೆ ಇತ್ತ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಪರಿಧಿಯ "ನಿಖರ"ವಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವೃತ್ತವೊಂದರ ವ್ಯಾಸ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ $5 \times 3 = 16$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಪೈನ ಬೆಲೆ 3. ಪೈನ ಮೌಲ್ಯ 3.14 ಆದರೆ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ $3.14 \times 5 = 15.70$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಿಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಪೈಗೆ ಎಷ್ಟು ವಿವಿಧ ಮೌಲ್ಯಗಳಿದೆಯೋ ಅಷ್ಟು ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಪೈನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದು ಲಕ್ಷಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ್ದರೂ, ಇನ್ನೂ ಕೊನೆ ಮುಟ್ಟಿಲ್ಲವಾದ ಕಾರಣ, ಎಂದಿಗೂ ನಾವು ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು (ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದದಷ್ಟೆ ಇರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು) ಎಂದಿಗೂ ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪೈನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಅಂಶ ತಿಳಿಯುವ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳೂ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ವಿದ್ವಾಂಸರು ಮಾಡಿದ ಪ್ರಯತ್ನ ಅಷ್ಟಿಷ್ಟಲ್ಲ. ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಳೆದಂತೆಲ್ಲಾ ಪ್ರಯತ್ನ ಮುಂದುವರೆಯಿತು. ಕ್ರಿ.ಶ. 1610ರಲ್ಲಿ ಯೂರೋಪಿನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಸ್ಯೂಲೆನ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕುತೂಹಲಕ್ಕಾಗಿ ನೋಡಿ.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288\ldots\ldots\ldots$$

1873ರಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ವಿಲಿಯಂ ಶಾಂಕ್ಸ್ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು 707 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದ. ಆತನ ನಂತರ 1946ರಲ್ಲಿ ಮ್ಯಾಂಚೆಸ್ಟರ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಫರ್ಗುಸನ್ ಹಾಗೂ ವಾಷಿಂಗ್‌ಟನ್ನಿನ ರೆಂಚ್ ಎಂಬುವರು ಒಮ್ಮೆಗೇ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು 808 ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ನಿರ್ಧರಿಸಿದರು. ವಿಲಿಯಂ ಶಾಂಕ್ಸ್ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿ 528ನೇ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇದ್ದ ಒಂದು ತಪ್ಪು ಮೇಲಿನ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಂದ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂದಿತು. ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಕ್ಷಕ್ಕೂ ಮಿಕ್ಕ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಪೈನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮುಟ್ಟಿಲ್ಲ, ಆದರೂ ಕೊನೆ ಮುಟ್ಟುವುದೂ ಇಲ್ಲ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಷ್ಟೇ ಇರುವ ಚೌಕವೊಂದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯತ್ತ ಗಮನ ಹರಿಸೋಣ. ಒಂದು ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2$ ಸೂತ್ರದಂತೆ $\pi$ ಚ. ಸೆಂ. ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ. $\pi$ ಚ. ಸೆಂ. ಮೀ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದಿರುವ, ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ $\sqrt{\pi}$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರ ಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮದಂತೆ, ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ನೇರ ಅಂಚುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಜಾಮಿತೀಯವಾಗಿ $\sqrt{\pi}$ ನ ರಚನೆಯಾಗಬೇಕು.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ($q \neq 0$). $\frac{p}{q}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹು ದಾದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ನಿರೂಪಣೆ ಅಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ 'ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ' ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾ ಹರಣೆಗೆ $\sqrt{2}$ ಇಂತಹ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ $\pi$ ಇಂತಹ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು 1761 ರಲ್ಲಿ ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಲ್ಯಾಂಬರ್ಟ್ ಕಂಡುಹಿಡಿ ದರು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮದಂತೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀ ಯವಾಗಿ ರಚಿಸಬೇಕಾದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಗುಣಕಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ

$$a_0x^\eta + a^1x^{\eta-1} + \ldots\ldots + a_\eta = 0$$

ಎಂಬ ಬೀಜೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಂತಹ ಬೀಜೀಯ ಸಮೀ ಕರಣದ ಮೂಲವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಬೀಜೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ಅಬೀಜೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರಚನೆ ಅಸಾಧ್ಯ. $\pi$ ಇಂತಹ ಒಂದು ಅಬೀಜೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು 1882ರಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ಕೀರ್ತಿ ಜರ್ಮನಿಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಲಿಂಡ್‌ಮನ್‌ನಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಈ ತರ್ಕದಂತೆ $\pi$ ಅಥವಾ $\sqrt{\pi}$ ಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರಚನೆ ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದಂತಾಯಿತು. ಈ ಸತ್ಯ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂದನಂತರ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದದಷ್ಟೇ ಇರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯೊಂದರ ನಿರ್ಮಾಣ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಷ್ಟೇ ಇರುವ ಚೌಕವೊಂದರ ನಿರ್ಮಾಣ ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ವಾಯಿತು. ಈ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಕಲ್ಪನೆಗಳ-ತತ್ವಗಳ ವಿವೇಚನೆ ಈ ಹೊತ್ತಿಗೆಯ ಮಿತಿಗೆ ಮೀರಿದ್ದಾದ್ದರಿಂದ ಆ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

# ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರ

ಪ್ರಯೋಗ, ವೀಕ್ಷಣೆ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಾಂತ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿನ ಅಧ್ಯಯನದ ಒಂದು ಕ್ರಮ. ಈ ಹಾದಿಯಿಂದ ನಿರೂಪಿತಗೊಂಡ ತತ್ವವನ್ನು, ಪ್ರಯೋಗಗಳ ನೆರವಿಲ್ಲದೇ, ಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿಶಿತಗೊಂಡ ಕಲ್ಪನೆಯಿಂದ ಸಾಧಿಸುವುದು ಅಧ್ಯಯನದ ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ರಮ. ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಯಾವುದೇ ತತ್ವ ಸರ್ವಮಾನ್ಯವಾಗಬೇಕಾದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಬೇಕು. ಈ ಎರಡು ಹಾದಿಗಳ ನಡುವೆ ತಾಳೆಯಿರಬೇಕಾದುದು ಅವಶ್ಯಕ. ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರದಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಎರಡೂ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಇತಿಹಾಸದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಪಡೆದಿರುವ ಎರಡು ಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಎರಡು ಪ್ರಯೋಗಗಳ ವಿವೇಚನೆ ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿದೆ.

ಕ್ರಿ. ಪೂ 240ಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಮತ್ತು ಅನಂತರದ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾಲದಲ್ಲಿ $\pi$ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಯಾವುದೇ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ತರ್ಕದ ದೃಢ ಬೆಂಬಲ ಇಲ್ಲದಿರುವುದು ಇತಿಹಾಸದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಯಾವುದೇ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಕೆಳಕಂಡ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

'Directions for obtaining the knowledge of all dark things' ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ, ಕ್ರಿ.ಪೂ. 1700ಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಅರಬ್ ಲೇಖಕ ಏಹ್ಮೆಸ್‌ನಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಪ್ರಾಚೀನ ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು

ಹಿಡಿಯಲು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದ ಸೂತ್ರವೊಂದರ ಬಗೆಗಿನ ಚರ್ಚೆಯಿದೆ. ಆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು d ಸೂಚಿಸಿದಲ್ಲಿ,

$$\text{ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \left(\frac{8}{9} d\right)^2$$

ವ್ಯಾಸ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡರಷ್ಟು ಎಂಬ ಸತ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ r ತ್ರಿಜ್ಯವಾದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\left(\frac{8}{9} \times 2r\right)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ $\pi r^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದೊಡನೆ ಇದನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$$\pi \text{ ಮೌಲ್ಯ } \frac{256}{81} = 3.1605$$

ಆಗುತ್ತದೆ. $\pi$ ಮೌಲ್ಯ ಸಾಕಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಗಣಿತದ ಬೆಂಬಲವಿಲ್ಲ.

ಮಹಮದ್ ಇಬ್ನ ಮೂಸ ಒಂದೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳುತ್ತಾನೆ, "ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಳಸಬಹುದಾದ ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ಕ್ರಮವೆಂದರೆ ವ್ಯಾಸವನ್ನು $3\frac{1}{7}$ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭವೂ, ಉತ್ತಮವೂ ಆದ ಕ್ರಮ ಬಹುಶಃ ದೇವರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಗೊತ್ತು". ಇಲ್ಲಿ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ $3\frac{1}{7}$. ಆದರೆ ಏಕೆ $3\frac{1}{7}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರ ಅವರಿಗೆ ದೊರೆತಿರಲಿಲ್ಲ.

**ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸನ ಕ್ರಮ**

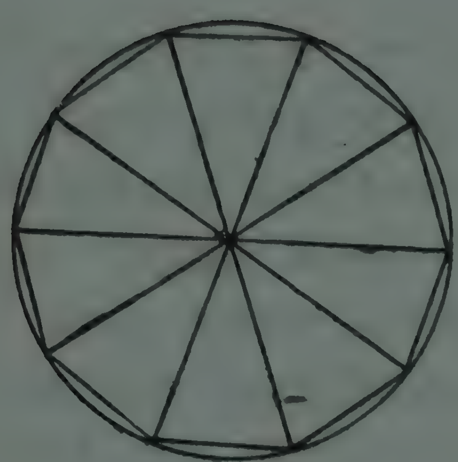
ಕ್ರಿ.ಪೂ. 287ರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಸಿಸಲಿ ದ್ವೀಪದ ಸಿರಾಕ್ಯೂಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಅತ್ಯುತ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ ವಿಜ್ಞಾನಿ, ಗಣಿತಜ್ಞ. ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಅಸೀಮ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಶ್ರಮಿಸಿದ ಈ ವಿದ್ವಾಂಸನ ಹತ್ತು ಬರಹಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆತಿವೆ. ಕ್ರಿ ಪೂ. 300 ರಲ್ಲಿ ಗಣಿತಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ನೈಜ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್, ನೇರ ಅಂಚು, ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ಮಣೆ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳೇ ಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನದ ಸರ್ವಮಾನ್ಯ ಪರಿಕರಗಳಾಗಿದ್ದ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ

ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ದಾಮಾಶಯು $\frac{22}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{223}{71}$ ರ ನಡುವೆಯಿಂದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ. ಈ ಸಾಧನೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ರಮ ಮನೋಜ್ಞ ; ವಿಷಯಂದ ಪ್ರತಿಪಾದನೆ ತುಂಬು ಸ್ಪಷ್ಟ.

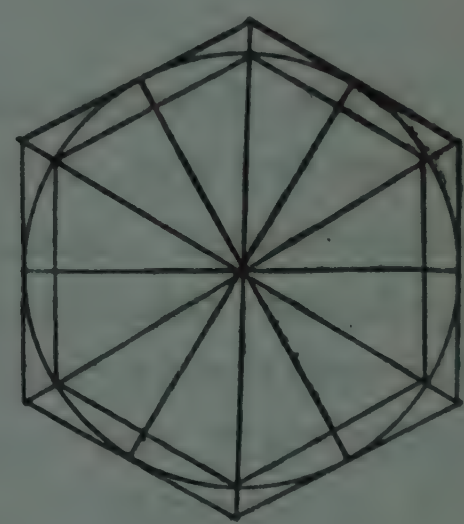
ತ್ರಿಭುಜ, ಚತುರ್ಭುಜ, ಪಂಚಭುಜ ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು. ಐದು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಂದ, ಐದು ಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಆಕೃತಿಯೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಅದು ಪಂಚಭುಜವಾಗುತ್ತದ. ಅಂತೆಯೇ ಆರು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆರು ಕೋನಗಳುಳ್ಳ ಆಕೃತಿಯೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಷಟ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ ಆಕೃತಿಯು ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನ ಉದ್ದ ಹೊಂದಿದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸಮ ಚತುರ್ಭುಜ, ಸಮ ಪಂಚಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಸಮಭುಜ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಸಮನಾದ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಅನೇಕ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಆಕೃತಿಯೊಂದನ್ನು ಸಮಬಹುಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರದಲ್ಲಿ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ವೃತ್ತವೊಂದರಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಸಮ ಷಟ್ಭುಜವೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಸಮಷಟ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಆರು ಸಮಬಾಹುಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಸಮ ಷಟ್ಭುಜವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಆರು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮದಶಭುಜವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಸಮನಾದ ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ. ಇದರೊಡನೆ ಸಮದಶಭುಜ ಆವೃತ್ತ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ, ಸಮ ಅಷ್ಟಭುಜ ಆವೃತ್ತ ವೃತ್ತದ ಪ್ರತಿ ಜ್ಯಾಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರಂತೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಬದಲಾಗದೇ ಇದ್ದಾಗ ಆವೃತ್ತ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಧಿಕವಾದಂತೆಲ್ಲಾ, ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಅಧಿಕ ಮಾಡುತ್ತಾ ನಡೆದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಬಹು ಸಮಭುಜ ಆಕೃತಿಯೊಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದಲೂ ಮೇಲಿನ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೇ ಬರಬಹುದು. ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ರಮದ ಮೂಲ ತತ್ವವಿದು. 96 ಭುಜಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ನ

ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಒಂದು ಸೆಂ. ಮೀ. ಅಥವಾ ಒಂದು ಅಂಗುಲವಾದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ $\pi$ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ತಿಳುವಳಿಕೆಯೊಡನೆ ನಾವು ಮುಂದೆ ಸಾಗಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ : 3



ಚಿತ್ರ : 4

ಎರಡು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ ವೃತ್ತವೊಂದರತ್ತ ಗಮನ ಹರಿಸೋಣ. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಈ ಎರಡು ಸಮ ಬಹು ಭುಜಗಳ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತದ ನಡುವೆಯಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ ಸಮ ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ "ಸ್ವಲ್ಪ" ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ "ಸ್ವಲ್ಪ" ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆಲ್ಲಾ, ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಧಿಕಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ತೃಪ್ತಿಯಾದಾಗ, ಎರಡು ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

$$2 n r \sin\left(\frac{360}{2n}\right) = 2 n r \tan\left(\frac{360}{2n}\right)$$

ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ವಿವಿಧ ಸಂಕೇತಗಳ ಅರ್ಥವಿವರಣೆ ಹೀಗಿದೆ :

n – ಸಮ ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

r – ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

n ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ,

$$n \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \text{ ಮತ್ತು } n \tan\left(\frac{360}{2n}\right)$$

ಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿತಿಯತ್ತ ನಡೆಯುತ್ತದೆ. 'ಪೈ'ನ ನಿಖರವಾದ ಮೌಲ್ಯ ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿತಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸತ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$n \sin\left(\frac{360}{2n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{360}{2n}\right)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವಂತೆ, $\pi$ನ ಮೌಲ್ಯ

$n \sin\left(\frac{360}{2n}\right)$ ಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ ಮತ್ತು $n \tan\left(\frac{360}{2n}\right)$

ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆದಂತಾಯಿತು. n ಗೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಪೈನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. n ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಇತ್ತಾಗ ದೊರೆಯುವ ಪೈನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

| ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n | $n \sin\left(\frac{360}{2n}\right)$ | $n \tan\left(\frac{360}{2n}\right)$ | 'ಪೈ'ನ ಸರಾಸರಿ ಮೌಲ್ಯ | ಶೇಕಡಾ ತಪ್ಪು |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2.598 | 5.196 | 3.90 | 24 |
| 4 | 2.828 | 4.000 | 3.41 | 8.5 |
| 6 | 3.000 | 3.464 | 3.23 | 2.8 |
| 8 | 3.062 | 3.314 | 3.19 | 1.5 |
| 12 | 3.106 | 3.215 | 3.16 | 0.3 |
| 18 | 3.125 | 3.170 | 3.15 | .03 |
| 36 | 3.139 | 3.150 | 3.144 | .07 |

ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್, ಈ ತತ್ವದಿಂದ, 96 ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಆಕೃತಿಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ $\pi$ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು $3\frac{10}{71}$ ಮತ್ತು $3\frac{1}{7}$ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿದನೆಂಬ ವಿಷಯ ಇತಿಹಾಸದ ಆಧಾರಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉಜ್ಜಯಿನಿಯ ಖಗೋಳೀಯ ವೀಕ್ಷಣಾಲಯದಲ್ಲಿ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ನಂತರ ಮುಖ್ಯಸ್ಥನಾಗಿದ್ದ, ಕ್ರಿ.ಶ. 1114ರಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ, ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ತತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆಯೇ $\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಾಕಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಇತಿಹಾಸಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. 384 ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮ ಬಹುಭುಜ ಆಕೃತಿಯ ಮೂಲಕ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ 3.141666. ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ನೀಡಿದ ಮೂರು ವಿವಿಧ ಮೌಲ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾದುದು $\frac{3927}{1260}$, ಅಷ್ಟು ನಿಖರವಲ್ಲದ್ದು $\frac{22}{7}$, ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ, ತುಂಬು ನಿಖರತೆಯ ಅವಶ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ $\sqrt{10}$.

**ಜಪಾನಿಯರ ಕ್ರಮ**

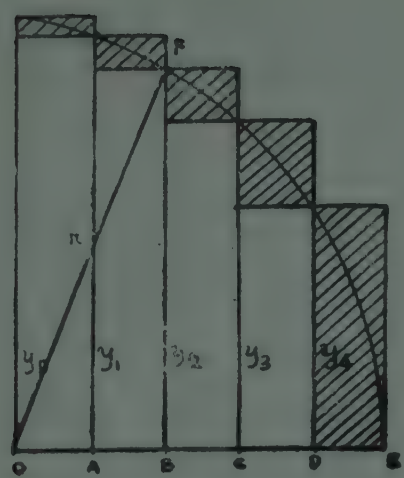
ಕ್ರಿ.ಶ. 1700ರಲ್ಲಿ ಜಪಾನ್ ಮತ್ತು ಯುರೋಪಿನ ಹಲವಾರು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಈಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ಅನೇಕ ಚಿಕ್ಕಚಿಕ್ಕ ಆಯತಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ : 5



ಚಿತ್ರ : 6




OF = r

ಚಿತ್ರ : 7

ಒಂದು ಸೆಂ.ಮಿ. ಅಥವಾ ಒಂದು ಅಂಗುಲ ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಐದು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳಿರುವುದನ್ನೂ, ಚಿತ್ರ 6ರಲ್ಲಿ ಐದು ಆಯತಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಭಾಗವನ್ನೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳಿಂದ ವೃತ್ತ ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿದೆ. ಅಂತಹ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ವೃತ್ತದ ಈ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೂ ಮತ್ತು ಐದು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಒಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 7ರಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಾಪೇಕ್ಷ ರೇಖಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಐದು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $\frac{1}{5}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{5}y_0$, ಎರಡನೆಯ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{5}y_1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮಿಕ್ಕ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತ $\frac{1}{5}[y_0+y_1+y_2+y_3+y_4]$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತ ಮಾತ್ರ. ಇಡೀ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತವನ್ನು $A_0$ ಸೂಚಿಸಿದಲ್ಲಿ, ನಮಗೆ **ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.**

$$A_o = \frac{4}{5}\left[y_0+y_1+y_2+y_3+y_4\right] \text{———————} (1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು—

$$Ai = \frac{4}{5}\left[y_1+y_2+y_3+y_4\right] \text{—————} (2)$$

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots$ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7ರಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. OFB ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$r^2 = OB^2 + y^2{}_2$ ಆದರೆ $OB = \frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $r = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$y^2{}_2 = 1^2 - \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 = \frac{25-4}{25} = \frac{5^2-2^2}{5^2}$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $y_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-2^2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯ ವಾದದಿಂದ ಬಿಂದುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು,

$$y_o = \frac{5}{5} = 1, \qquad y_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-2^2},$$

$$y_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-4^2}, \qquad y_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-1^2},$$

$$y_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-3^2}$$ ಇತ್ಯಾದಿ

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೊಡುವ 1 ಮತ್ತು 2ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$A_o = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5} + \sqrt{5^2-1^2} + \sqrt{5^2-2^2} + \sqrt{5^2-3^2} + \sqrt{5^2-4^2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5^2}\left[5 + \sqrt{5^2-1^2} + \sqrt{5^2-2^2} + \sqrt{5^2-3^2} + \sqrt{5^2-4^2}\right]$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$Ai = \frac{4}{5^2}\left[\sqrt{5^2-1^2} + \sqrt{5^2-2^2} + \sqrt{5^2-3^2} + \sqrt{5^2-4^2}\right]$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಂಲಭೀಕರಿಸಿದಾಗ $A_o$ ಮತ್ತು $A_i$ ಗಳ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 3.44 ಮತ್ತು 2.64 ಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A_o$ ಮತ್ತು $A_i$ ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\pi$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಈ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವ ಅಂಶ. ಆಂದರೆ $\pi$ನ ಮೌಲ್ಯ 3.44 ಮತ್ತು 2.65 ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು. $\pi$ ನ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ $\frac{1}{2}[3.44 + 2.64] = 3.04$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅಂದಾಜಿನಂತೆ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು $3.04 \pm 0.40$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಐದು ಸಮಭಾಗವನ್ನಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹತ್ತು ಭಾಗವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ $\pi$ನ ಮೌಲ್ಯ ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಧಿಕವಾದಂತೆಲ್ಲಾ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ ಉತ್ತಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ಆಯತಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧಾರವಾದ ಮೌಲ್ಯವಿದೆ.

| | | |
|---|---|---|
| $\pi_5$ (ಐದು ಆಯತಗಳು) | = | 3.04 ± 0.40 |
| $\pi_{10}$ (ಹತ್ತು ಆಯತಗಳು) | = | 3.10 ± 0.20 |
| $\pi_{15}$ (ಹದಿನೈದು ಆಯತಗಳು) | = | 3.12 ± 0.14 |
| $\pi_{20}$ (ಇಪ್ಪತ್ತು ಆಯತಗಳು) | = | 3.13 ± 0.10 |

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಪ್ರತಿಬಾರಿಯೂ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅವರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಅನೇಕ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಆಯತಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಬದಲಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $A_0$ ಮತ್ತು $A_1$ಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ, ಅನಂತರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

$$A_0 = \frac{4}{n^2}\left[n+\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\cdots\cdots\right]$$

$$A_1 = \frac{4}{n^2}\left[n+\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\cdots\cdots\right]$$

ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮದಿಂದ $\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಐವತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ಕೀರ್ತಿ ಜಪಾನಿನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಮಟ್ಸುನಾಗಾನಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

**ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಕ್ರಮ**

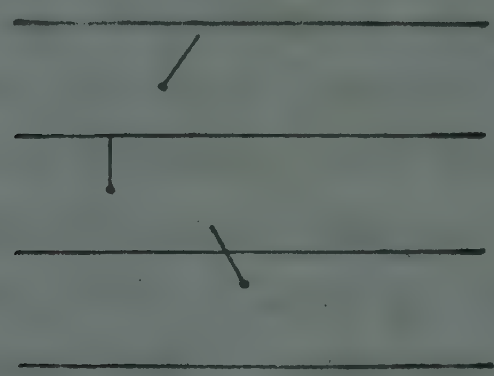
ಸಂಭವನೀಯ ತತ್ವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲೊಂದು. ಫ್ರಾನ್ಸಿನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಪಿಯರ್ ಡಿ. ಫರ್ಮಾಟ್ ಮತ್ತು ಬ್ಲೇಸ್ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್‌ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತಗೊಂಡು, ಸುಮಾರು ಎರಡು ಶತಮಾನಗಳ ಕಾಲ ಉದಾಸೀನತೆಗೆ ತುತ್ತಾಗಿ ಅನಂತರದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಪ್ರಬಲ ಆಯುಧವಾಗಿರುವ ಈ ಸಂಭವನೀಯ ತತ್ವ ಸಂಖ್ಯಾವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇಂದು ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಾತ್ರ ಅಸಾಧಾರಣವಾದುದು. ಜ್ಞಾನಗಂಗೋತ್ರಿ ; ಭೌತಜಗತ್ತು ; "ಕ್ವಾಂಟಂ, ಚಲನಸಿದ್ಧಾಂತ, ಅನುವಂಶತತೆಯ ತತ್ವ, ಜನನ ಮರಣಗಳ ಅಂದಾಜು, ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತ ಟೆಲಿಫೋನ್

ವಿನಿಮಯ ಕೇಂದ್ರದ ರಚನೆ, ವ್ಯೋಮಯಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ಹಲವಾರು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಪಾತ್ರವಿದೆ." ಈ ತತ್ವದ ಮೇಲೆ ಆಧರಿತವಾಗಿರುವ π ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರದ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳ ವಿವೇಚನೆಗೆ ಮುನ್ನ ಈ ತತ್ವದ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಪಾಠಗಳ ಪರಿಚಯ ಅವಶ್ಯಕವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

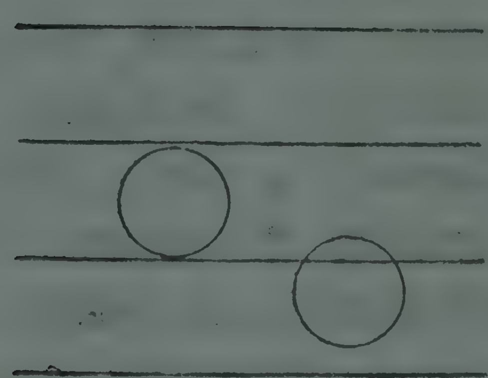
ನಾಣ್ಯವೊಂದಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮುಖಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಮುಖಗಳನ್ನು a ಮತ್ತು b ಎನ್ನೋಣ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೇಲೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬಿದ್ದನಂತರ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. ನಾಣ್ಯ ನೆಲಕ್ಕೆ ಬಿದ್ದಮೇಲೆ, a ಅಥವಾ b ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ನಮಗೆ a ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗ ಬೇಕಾದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಅದು ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಘಟನೆಯು ನಡೆಯ ಬಹುದಾದ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ, ನಮಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗಿ ಅಥವಾ ನಮ್ಮಿಚ್ಛೆಯಂತೆ ನಡೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ದೊರೆಯುವ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯೇ ಆ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆ. ಈ ತತ್ವವನ್ನು, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಸುಲಭ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, a ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವ $\frac{1}{2}$ ಎಂದಾಯಿತು. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, N ಪ್ರಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ M ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ಜಯಶೀಲವಾಗಬಹುದಾದರೆ, ಈ ಘಟನೆಯು ಸಫಲವಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ $\frac{M}{N}$. ವಿಫಲವಾಗುವ ಸಂಭವ $\frac{N-M}{N}$. ಒಂದು ಘಟನೆ ನಡೆಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಅದರ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಸೊನ್ನೆ. ನಡೆಯುವುದು ನಿಶ್ಚಯವಾದಲ್ಲಿ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಒಂದು. ಸಂಭವನೀಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಥಮ ಪಾಠದ ಈ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ, 1960 ರಲ್ಲಿ ಫ್ರೆಂಚ್ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಕೊವೆಂಟಾ-ಡಿ-ಬಫನ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

π ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡುವ ಈ ಸಣ್ಣ, ಸುಲಭ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯ ವಾದುದು ಒಂದು ಲೇಖನಿ, ಬಿಳಿಯ ಕಾಗದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಗುಂಡು ಸೂಜಿ (ಅಥವಾ ಒಂದು ಬೆಂಕಿ ಕಡ್ಡಿಯಾದರೂ ಆಗಬಹುದು). ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಗುಂಡು ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದದ ಎರಡರಷ್ಟು ಅಂತರವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿ ಸಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಬಿಳಿಯ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟ ನಂತರ ಗುಂಡು ಸೂಜಿಯನ್ನು ಮೇಲಿನಿಂದ ಆದರ ಮೇಲಿನಿಂದ ಅದರ ಮೇಲೆ ಬೀಳು ವಂತೆ ಹಾಕಿದಾಗ, ಗುಂಡು ಸೂಜಿ, ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಸ್ಪರ್ಶಿ ಸುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ). ಸೂಜಿ,

ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದಾಗಲೂ ಅದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಸೂಜಿಯನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಬಾರಿಯೂ ಗುರುತಿಸೋಣ. ಅನಂತರ ಸೂಜಿಯನ್ನು



ಚಿತ್ರ : 8



ಚಿತ್ರ : 9

ಒಟ್ಟು ಬಾರಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಅದು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ದಾಮಾಶಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಆ ದಾಮಾಶಯ $\pi$ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ ನಿಖರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. 1849–53ರಲ್ಲಿ ವುಲ್ಫ್ ಎಂಬಾತ 5000 ಬಾರಿ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆತ ಪೈ ಮೌಲ್ಯ 3.1596. 1885ರಲ್ಲಿ ಸ್ಮಿತ್ ಎಂಬಾತ ನಡೆಸಿದ 3204 ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಂದ ದೊರೆತ ಪೈ ಮೌಲ್ಯ 3.1412 ಮತ್ತು 3.155ಗಳ ನಡುವಿನದು. ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾದ ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ತರ್ಕ ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದುದು.

ವಿಷಯದ ಸುಲಭ ನಿರೂಪಣೆಗಾಗಿ ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಇಂಚು

ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೇಲಿನಿಂದ ಹಾಕಿದ ಸೂಜಿ, ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು A ಬಾರಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು n ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಭಾಗವೂ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ $\frac{A}{n}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಇಂಚು ಉದ್ದದ ಸೂಜಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ಭಾಗವೂ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ $2\frac{A}{n}$ ಆಗುತ್ತದೆ. 10 ಇಂಚು ಉದ್ದದ ಸೂಜಿಯು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ $10\frac{A}{n}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದ ಅಧಿಕವಾದಂತೆಲ್ಲಾ ಅದು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತಾ ನಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

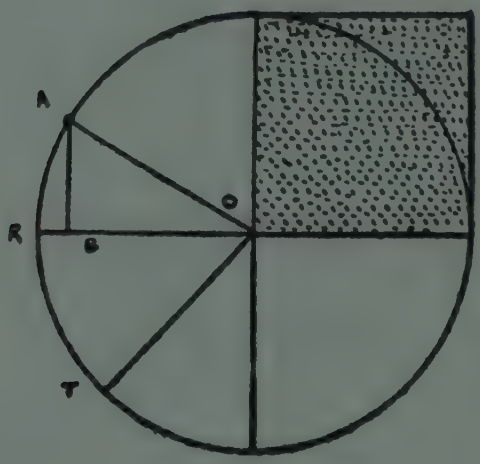
ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ತಂತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸೋಣ. ಈ ತಂತಿಯಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿದಾಗ, ಅದು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಇಲ್ಲವೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ). ವೃತ್ತವನ್ನು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ B ಬಾರಿ ಹಾಕಿದಲ್ಲಿ, ಅದು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು 2B ಬಾರಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಇಲ್ಲವೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದಲ್ಲಿ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ $2\pi r$. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ, ಮೊದಲು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ $2\pi$ನಷ್ಟು ಅಧಿಕ. ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದದೊಡನೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಈಗಾಗಲೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಅಂಶ. ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸೂಜಿಯ ಉದ್ದ $2\pi r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸೂಜಿ, ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಸಂಭವ, ಮೊದಲಿನ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದ ಸೂಜಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಸಂಭವಕ್ಕಿಂತ $2\pi$ ಪಾಲಿನಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ನಾವು ಇದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದಲ್ಲಿ

$$2B = 2\pi . A$$

$$\pi = \frac{B}{A} = \frac{\text{ಸೂಜಿಯನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸೂಜಿ, ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಪ್ರಯೋಗ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚಾಗಿ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾದಂತೆಲ್ಲಾ ಬರುವ ಪೈ ಮೌಲ್ಯದ ನಿಖರತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

ಸಂಭವನೀಯ ತತ್ವದ ಮೇಲೆಯೇ ಆಧರಿತವಾಗಿರುವ ಪೈ ಬೆಲೆಯ ನಿರ್ಧಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನೀಗ ಗಮನಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳ ಮೂಲಕ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ.




ಚಿತ್ರ : 10

r ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2$ ಆಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ $\frac{\pi r^2}{4}$ ಆಗಬೇಕು. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಸೆಂ. ಮೀ. ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{\pi}{4}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಬಾಹುವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ನಿಯಮರಹಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸೋಣ. ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ, ಈ ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಆಧರಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ,

$$\frac{\text{ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಚೌಕದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{\text{ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\text{ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$$

ಎಂದಾಯಿತು. ಈ ಮೊದಲೇ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{\pi}{4}$ ಮತ್ತು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 1 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 200 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮರಹಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\frac{\text{ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{200} = \frac{\pi/4}{1} = \pi/4$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\pi = \frac{4 \times \text{ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಾಂಶದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{200}$$

ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಯೋಗದಂತೆಯೇ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಂತೆ ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳೊಡನೆ ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕಾಗಿ ಅನೇಕ ಕುತೂಹಲಪೂರ್ಣವಾದ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕಾಲದಿಂದ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಇಂತಹ ಹಲವಾರು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಪಂಚದ ಮುಂದಿಡುತ್ತ ಬರುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡವು ಮುಖ್ಯವಾದುವುಗಳು.

(i) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots\ldots}$$

(ii) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

(iii) $$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots\ldots\right)$$

(iv) $$\pi = 2.2\left[\frac{2.4}{3.3}\right]\left[\frac{4.6}{5.5}\right]\left[\frac{6.8}{7.7}\right]\ldots\ldots$$

(v) $$\pi = 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3^2.5}-\frac{1}{3^3.7}+\frac{1}{3^4.9}\ldots\ldots\right)$$

(vi) $$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left[\frac{1}{5}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{1}{239}\right]$$

(vii) $$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ldots\ldots}}}}}}$$

$\pi$ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅನೇಕ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಬರೆಯಬಹುದಾದರೂ ಸಹ ಅಂತಹ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವಿಜ್ಞಾನದ ಯಾವ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ $\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಬರೆದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತೆ ಕೆಲವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕೇ ಸ್ಥಾನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಕೇವಲ ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು

(3.14) ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಅನೇಕ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಬರೆಯಬೇಕಾದಲ್ಲಿ, ಅದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಹಲವಾರು ಸುಲಭ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿರುವ ಈ ಸುಲಭ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

"YES I HAVE A NUMBER" ಈ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಐದು ಪದಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಪದದಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಮೊತ್ತ $\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಲ್ಲಿ $\pi$ ಬೆಲೆ 3.1416 ಎಂದಾಯಿತು. ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೂ ಹಲವಾರು ಸಾಲುಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

"HOW I WISH I COULD RECOLLECT OF
CIRCLE ROUND THE EXACT RELATION
ARCHIMEDE UNWOUND"

ಈ ಸಾಲಿನಂತೆ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ 3.1415926535897... ಆಗುತ್ತದೆ.

"YES I NEED A DRINK ALCHOLIC
OFCOURSE AFTER THE HEAVY SESSIONS
INVOLVING QUANTUM MECHANICS"

ಈ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿಯಬಹುದಾದ $\pi$ ಮೌಲ್ಯ

3.14159265358979

$\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲು ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಲುಗಳು ಪ್ರಪಂಚದ ಅನೇಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಪುಲವಾಗಿದೆ.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ, ಅಷ್ಟೇ ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾದ ಹಲವಾರು ಸುಲಭ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

'ಎರಡರ' ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸುಮಾರಾಗಿ 1.41421 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು

ಬಹುದು. ಅಂತೆಯೇ 3ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸುಮಾರಾಗಿ 1.73205 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ,

$$\sqrt{2} = 1.41421$$

$$\sqrt{3} = 1.73205$$

ಎಂದಾಯಿತು.

ಈ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಬರುವ ಮೊತ್ತ, ಪೈ ಬೆಲೆಗೆ ಸುಮಾರಾಗಿ ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.14626$ ಎಂದಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸುಮಾರಾಗಿ $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \pi$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಂತೆಯೇ $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1.73205 - 1.41421 = 0.31874$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸುಮಾರಾಗಿ $\frac{1}{\pi}$ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\pi}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \pi \times \frac{1}{\quad} = 1$$

ಆಗುತ್ತದೆ,

ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಪೈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಸಾಲುವಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಕೊಡಬಲ್ಲ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉದಹರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$\pi = \sqrt{15} - \sqrt{3}, \quad \sqrt{50} - \sqrt{40}, \quad \sqrt{79} - \sqrt{33}$$

$\sqrt{196} - \sqrt{118}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

'$\pi$' ಮೂಲವಾಗಿರತಕ್ಕ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ವಿಷಯದ ಸಹಾಯದಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x^2-5x-6=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಇರುವ ಮೂಲಗಳು ಎರಡು, ಅವುಗಳು $x=6$ ಮತ್ತು $x=-1$. ಈ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. $x=5$ ಮತ್ತು $x=-1$ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(x-6)(x+1)=x^2-5x-6=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $r_1$ ಮತ್ತು $r_2$ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೊಂದರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಥ $(x-r_1)(x-r_2)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $x^2-x(r_1+r_2)+r_1r_2=0$. $r_1$ ಮತ್ತು $r_2$ ಗಳ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$r_1+r_2=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

ಮತ್ತು

$$r_1r_2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x^2-2\sqrt{3}.\,x+1=0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\pi$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\pi}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಂತೆಯೇ $x^2+2\sqrt{3}x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $-\pi$ ಮತ್ತು $-\frac{1}{\pi}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೆ $x^4-10x^2+1=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ $\pi$, $\frac{1}{\pi}$, $-\pi$, $-\frac{1}{\pi}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

# ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ π ಸ್ಥಾನ

ವಿಜ್ಞಾನದ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಕಾರದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಆಗಲಿ, ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತತ್ವವನ್ನೇ ಆಗಲಿ, ವಿಷಯವನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಕುರಿತು ಯೋಚಿಸಿದಾಗ, ಕಡೆಗೆ ಅದರ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯ ಬಗೆಗೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ ಜ್ಞಾನಾರ್ಜನೆಗಾಗಿಯೇ ವಿಷಯವೊಂದರ ವಿಶದ ಅಧ್ಯಯನದ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನ ಸ್ತುತ್ಯವಾಗುತ್ತದಷ್ಟೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಕುರಿತು ಯೋಚಿಸುವುದೂ ಸಹಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪೈ ಅನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಅದರ ವಿಶಾಲ ಪ್ರಪಂಚದ ಪರಿಚಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, ತಾಂತ್ರಿಕ ಜ್ಞಾನಗಳ ಅನಿವಾರ್ಯ ಅಂಗವಾಗಿರುವುದರೊಡನೆ, ಜೂಜು, ಬ್ಯಾಂಕ್ ವ್ಯವಹಾರ, ಉಳಿತಾಯ ಮೊದಲಾದ ವಿನಾಶ ಹಾಗೂ ರಚನಾತ್ಮಕ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಇದರ ಪಾತ್ರವಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಪರಿಚಯದ ಕಾರ್ಯ ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯ.

ಪೈನ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯ ವಿವೇಚನೆ, ಈ ಹೊತ್ತಿಗೆಯ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ನಮ್ಮನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಚೀನ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯುತ್ತದೆ. ಅಂದಿನಿಂದಲೂ ಅದರ ಉಪಯೋಗ ಅಪಾರ. ಇತಿಹಾಸ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಎದ್ದು ತೋರುವ ಅನೇಕ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಕುಶಲತೆಗಳಿಗೆ ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿ ನಿಲ್ಲುವ ಪ್ರಾಚ್ಯ ದೇವಾಲಯಗಳು, ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು, ಸೌಧಗಳು, ಕೊಳಗಳು, ಸ್ನಾನಾಗಾರಗಳು, ವಿವಿಧ ಉಪಕರಣಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಹಿಂದೆ, ಪೈ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಅರ್ಥದ ಅರಿವಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ, ಗಾತ್ರ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪೈ ಮೊದಲಿನಿಂದಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆ. ಇದರೊಡನೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಹಲವಾರು ಮುಖ್ಯ ಪಾಠಗಳಿಗೆ ಪೈ ಆಧಾರ. ಹಲವಾರು ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಪ[illegible]ಂತಿಗಳನ್ನು ನೀಡುವ, ಭೌತ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಹೊತ್ತಿಗೆಯಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ, ಪೈ ಅನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ, ಪೈಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$\pi^2 = 9.8696$$

$$\pi^3 = 31.006$$

$$\frac{1}{\pi} = 31831$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0.101032$$

$$\sqrt{\pi} = 1.7725$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1.4646$$

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1.2407$$

$$\frac{4\pi}{3} = 4.1888$$

$$\frac{\pi}{180} = .01745$$

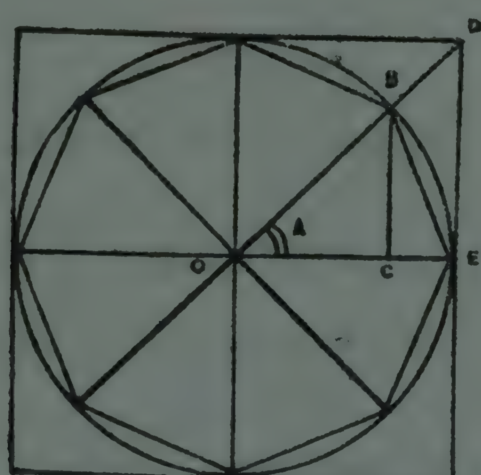
| ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿ | ಸುತ್ತಳತೆ | ವಿಸ್ತೀರ್ಣ | ಗಾತ್ರ |
|---|---|---|---|
| ವೃತ್ತ (r-ತ್ರಿಜ್ಯ) | $2\pi r$ | $\pi r^2$ | — |
| ಗೋಳ (r-ತ್ರಿಜ್ಯ) | — | $4\pi r^2$ | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |
| ದೀರ್ಘವೃತ್ತ (2a ಮತ್ತು 2b- ಅಕ್ಷರಗಳು | $2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ | $\pi ab$ | — |
| ಶಂಖಾಕೃತಿ (r-ತ್ರಿಜ್ಯ, h-ಎತ್ತರ l-ಓರೆ ಎತ್ತರ) | — | $\pi r\,(l+r)$ | $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ |
| ವರ್ತುಲ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ (r-ತ್ರಿಜ್ಯ, h-ಎತ್ತರ) | — | $2\pi r(h+r)$ | $\pi r^2 h$ |

ಹಲವಾರು ಮುಖ್ಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಈ ಸೂತ್ರಗಳೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ತಾಂತ್ರಿಕಜ್ಞಾನ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಮುಂತಾದ ಪ್ರಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವಾಗ, ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಾಗ ಪೈ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ವಿಶದ ವಿವೇಚನೆ ಇಲ್ಲಿ ಅಪ್ರಕೃತ.

ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಹಲವಾರು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ, ವೃತ್ತವೊಂದರ

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ $\pi r^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ, ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಸುಪರಿಚಿತ ವಾದುದು. ಅನೇಕ ಸಾರಿ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸು ವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $\pi r^2$ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಇಲ್ಲದೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡುಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಂದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರಕ್ಕಾಗಿ ಯೋಚಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $\pi r^2$ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಿದ ಕ್ರಮವೊಂದರ ಸ್ಥೂಲ ಪರಿಚಯವಿಲ್ಲಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, n ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ n ಭುಜಗಳಿಂದ ಆವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ n=8) ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ n ಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ಸಮವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ n ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತದ




ಚಿತ್ರ : 11

ಕೇಂದ್ರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನದ ಬೆಲೆ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ∟A) $\frac{360}{n}$.
$\frac{1}{2}$ n ಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $2(\frac{1}{2}n)$ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. OBC ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ BC=R Sin A ಮತ್ತು ODE ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ DE=R tan A (R ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ) ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಮೊದಲ ಪಾಠಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OBE ಮತ್ತು ODE ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{2}$ R.R Sin A $= \frac{1}{2} R^2$ Sin A ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ R.R tan A $= \frac{1}{2} R^2$ tan A ಎಂದು ಬರೆಯು

ಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ n ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$n ಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{2}nR^2 \sin A$ ಮತ್ತು $\frac{1}{2}nR^2 \tan A$ ಆಗುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಈ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮಧ್ಯೆಯಿರಬೇಕೆಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. $\frac{1}{2}n = N$ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= S$, ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ,

$$NR^2 \sin A < S < NR^2 \tan A$$

ಅಥವಾ

$$\text{(i)} \qquad N \sin A < \frac{S}{R^2} < N \tan A$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

N ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅತ್ಯಧಿಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ನಿಖರತೆ ಅವಶ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು

$$\text{(ii)} \qquad N \sin A \simeq \pi \simeq N \tan A$$

ಎಂದು ಬರೆಯಲಡ್ಡಿಯಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $\frac{S}{R^2} \simeq \pi$ , ಆದ್ದರಿಂದ $S \simeq \pi R^2$ ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವೂ ಅತ್ಯಂತ ನಿಖರವಾದ ಸೂತ್ರ ವೇನಲ್ಲ ಎಂದಂತಾಯಿತು.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಮುಖ ಭಾಗಗಳಲ್ಲೊಂದಾದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪೈ ಅಪಾರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಪಾಠಗಳಿಂದಲೂ, ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಲೂ ಪೈನ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಾವು ಅರಿಯಬಹುದು. ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಕ್ರಿ.ಪೂ. 240ರಲ್ಲಿ ಪೈ ಮೌಲ್ಯಮಿತಿಗಳನ್ನು ತನ್ನ ಅಸಾಧಾರಣ ಪ್ರತಿಭೆಯಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ನಂತರ, ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯಲ್ಲಿ, 'ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ'ಯ ಹೊಸ ಕಲ್ಪನೆಯ ಉದ್ಭವವನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ಒಂದು ಸೆಂ. ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 10). OR = OT ಆಗಿರುವ ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ TRನ ಉದ್ದ 'a'

ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, TOR ಕೋನವನ್ನು 'a' ರೇಡಿಯನ್ಸ್ ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ತರ್ಕದಿಂದ $360^\circ = 2\pi$ ರೇಡಿಯನ್ಸ್ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$$

ರೇಡಿಯನ್ಸ್ ಎಂದಾಯಿತು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $\pi$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ನ ಮೌಲ್ಯದಂತೆ $3\frac{1}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಲ್ಲಿ

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = \frac{3\frac{1}{7}}{180} = \frac{22}{180\times 7} \simeq \frac{11}{630}$$

ರೇಡಿಯನ್ಸ್ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ

$$1 \text{ ರೇಡಿಯನ್} = \frac{630}{11} = 57\frac{3}{11}^\circ$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಕೋನಗಳನ್ನು ಈ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಪರಿಪಾಠ ಹಲವಾರು ಪ್ರಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿದೆ. ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ, ಕೋನವೊಂದು ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದಿದ್ದಾಗ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ x ಕೋನ) $\sin x \simeq x$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣ, x ಕೋನ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಪಟ್ಟಿ ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಸುಪರಿಚಿತ. ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಪೈನ ಸಂಮಾರಾದ ಮೌಲ್ಯದ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಿಂದ ಇಂತಹ ಪಟ್ಟಿಯೊಂದನ್ನು ನಾವೇ ಸ್ವತಃ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಕುತೂಹಲ ಕ್ರಮದತ್ತ ಈಗ ದೃಷ್ಟಿ ಹರಿಸೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ದಾಮಾಶಯಗಳು ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಇವುಗಳ ಜ್ಞಾನದಿಂದ ಮಿಕ್ಕ ದಾಮಾಶಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಒಂದು ಸೆಂ. ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ $2\pi$. ವೃತ್ತವೊಂದರಲ್ಲಿ $360°$ ಗಳಿವೆ. $360°$ ಗಳು, $2\pi$ ಸೆಂ. ಮೀ. ಉದ್ದವನ್ನು (ಪರಿಧಿಯ ಉದ್ದ) ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, $1°$ ಯ ಕಂಸದ ಉದ್ದ (The tenth of an arc of $1°$) $\frac{2\pi}{360}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ,

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = \frac{3.14159}{180} \doteq 0.01745$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$$2° \text{ ಕಂಸದ ಉದ್ದ } \frac{2\pi}{360} \times 2 \doteq 0.03490$$

$$3° \text{ ಕಂಸದ ಉದ್ದ } \frac{2\pi}{360} \times 3 \doteq 0.05236$$

$$4° \text{ ಕಂಸದ ಉದ್ದ } \frac{2\pi}{360} \times 4 \doteq 0.06981$$

$$5° \text{ ಕಂಸದ ಉದ್ದ } \frac{2\pi}{360} \times 5 \doteq 0.08725$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯವನ್ನು

$$\sin 1° = 0.01745$$

$$\sin 2° = 0.0349$$

$$\sin 3° = 0.0524$$

$$\text{Sin } 4^\circ = 0.0698$$

$$\text{Sin } 5^\circ = 0.0873$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(ಚಿತ್ರ 10ರಿಂದ, $\angle AOB = 1^\circ$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, $\text{Sin } 1^\circ = \frac{AB}{AO}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಿರುವ ಕೋನದ ಬೆಲೆ ಚಿಕ್ಕದಾದ್ದರಿಂದ, AB ಭುಜದ ಉದ್ದ ಸುಮಾರಾಗಿ AR ಕಂಸದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ $\text{Sin } 1^\circ = \frac{AR}{AO}$ ಆಗುತ್ತದೆ. AO=1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\text{Sin } 1^\circ = AR$. AR ಕಂಸ, $1^\circ$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಎದುರಾಗಿರುವುದರಿಂದ, AR ಅನ್ನು $1^\circ$ ಕಂಸದ ಉದ್ದ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $2^\circ$ ಕಂಸದ ಉದ್ದ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನೂ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.)

ಮೇಲೆ ನಮಗೆ ದೊರೆತಿರುವ ಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯದ ಸುಮಾರಾದ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಕೊಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. $\text{Sin}^2 A + \text{Cos}^2 A = 1$. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{1 - \text{Sin}^2 A}$. A ಕೋನಕ್ಕೆ 1 ರಿಂದ 5ರ ತನಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸುಲಭೀಕರಿಸಿದಾಗ

$$\text{Cos } 1^\circ = 0.9998$$

$$\text{Cos } 2^\circ = 0.9994$$

$$\text{Cos } 3^\circ = 0.9986$$

$$\text{Cos } 4^\circ = 0.9976$$

$$\text{Cos } 5^\circ = 0.9962$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ನಮಗೆ ಪ್ರಸ್ತುತದಲ್ಲಿ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಬೆಲೆ 1 ರಿಂದ 5°ಗಳವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಈ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮಿಕ್ಕ ಕೋನಗಳ ದಾಮಾಶಯವನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ Sin 6°ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು

$$\sin 6^\circ = \sin (5^\circ + 1^\circ) = \sin 5^\circ \cos 1^\circ + \cos 5^\circ \sin 1^\circ$$

ಅಥವಾ

$$\sin 6^\circ = \sin (3^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ \cos 3^\circ + \cos 3^\circ \sin 3^\circ$$

$$= 2. \sin 3^\circ \cos 3^\circ$$

$$= 2(0.0524)\ (0.9986)$$

$$= 0.1046$$

ಇದೇ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯಗಳನ್ನು 15° ಗಳ ತನಕ ನಿರ್ಧರಿಸಿ, ಅನಂತರ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ $\sin 30^\circ = 0.5000$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದಿನ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. 30° ರಿಂದ 45°ಗಳ ವರೆಗಿನ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ಸಮೀಕರಣಗಳ ನೆರವು ಪಡೆಯಬಹುದು

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\sin 16^\circ = \sin (30^\circ - 14^\circ)$$

ಅಥವಾ

$$\sin 16^\circ = \sin (8^\circ + 8^\circ)$$

$$\sin 35^\circ = \sin (18^\circ + 17^\circ)$$

ಅಥವಾ

$$\sin 35^\circ = \sin (10^\circ + 25^\circ) \; ;$$

ಮುಂತಾದ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮೌಲ್ಯನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಬಹುದು

$$\sin A = \cos (90 - A)$$

$$\sin A = \sin (90 - A)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ 45 ರಿಂದ 49° ಗಳವರೆಗಿನ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ ಮತ್ತು $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$. ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್ ದಾಮಾಶಯಗಳ ಮೌಲ್ಯ ತಿಳಿದ ನಂತರ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ದಾಮಾಶಯವನ್ನು

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

ಸಂಬಂಧದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಮೈನ ಸುಮಾರಾದ ಮೌಲ್ಯದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಿಂದ ನಾವೇ ಸ್ವತಃವಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ಈ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ದಾಮಾಶಯದ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೌಲ್ಯಗಳು ತೀರಾ ನಿಖರವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಗಮನದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಿದ ದಾಮಾಶಯದ ಬೆಲೆ ·1 ರಿಂದ 5° ಗಳವರೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನ

ಗಳವರೆಗೂ, ಅದರಿಂದ ಮುಂದೆ ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ನಿಖರವಾಗಿರಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

$\pi$ ಮತ್ತು e ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ಎರಡು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು. ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಪೈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಯೋಚಿಸುವಾಗ $\pi$ ಮತ್ತು e ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ, ಅತ್ಯಂತ ಸರಳರೂಪದ, ಅಷ್ಟೇ ಮನೋಜ್ಞವಾದ ಸೂತ್ರವೊಂದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೆನೆಯಬಹುದು. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಆ ಸೂತ್ರವನ್ನು

$$\pi = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$$

ಅಥವಾ

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಅತಿಮುಖ್ಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಈ ಸರಳ ಸೂತ್ರ, ಪೈ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ ಸುಲಭ ಕ್ರಮವೊಂದನ್ನು ಒದಗಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಸೂಜಿಯೊಂದನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಅಸಂಖ್ಯ ಬಾರಿ ಹಾಕಿ ಪೈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ ಕೌಂಟ್ ಬಫನ್. ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಸುಲಭರೂಪದ ಯಂತ್ರವೊಂದನ್ನು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಅನೇಕ ವಸ್ತು ಪ್ರದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ, ಜಾತ್ರೆಗಳಲ್ಲಿ, ರಸ್ತೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಯಂತ್ರದಿಂದ ಬರುವ ಪೈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಊಹಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಅದನ್ನು ಹಣ ಮಾಡುವ (ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವ !) ಜೂಜಾಟಗಳಿಗೆ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಅಕ್ಷರಮಾಲೆಯ 'P' ಅಕ್ಷರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ, ತ್ರಿಜ್ಯ 'ಒಂದು' ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವೊಂದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಗ್ರೀಕರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ $\pi$ ಅಕ್ಷರ, ಆವರ್ತಕಾಲಿಕ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ

ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿಪುಲವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲೋಲಕದ ಆವರ್ತಕಾಲವನ್ನು

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದರಂತೆಯೇ ಬೆಳಕು ಮತ್ತು ಶಬ್ದ ತರಂಗಗಳ ಚಲನೆಯನ್ನೂ, ತರಂಗಚಲನೆಯಿಂದ ಮಧ್ಯವರ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕಣಗಳ ಸ್ಥಾನ ಪಲ್ಲಟವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪೈ ಪಾತ್ರವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಸರಳಸಂಗತ ಚಲನೆ, ವೃತ್ತೀಯ ಚಲನೆ ಮುಂತಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಕಣದ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಿರ್ದೇಶನದಲ್ಲಿ ಪೈ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತೀಯ ಅಲೆಗಳ ವಿಂಗಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಪೈ ಶೋಧಕದ ಉಪಯೋಗವಿದೆ. "ವಾರ್ತಾಗ್ರಾಹಕ ಮತ್ತು ವಾರ್ತಾ ಪ್ರಸಾರಕ ತಂತಿ"ಗಳ (Antenna) ತತ್ವ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ, ರಚನೆಯಲ್ಲಿ, ನಿಯಾಮಕ ಪ್ರವಾಹ ಮಾರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ (Control Circuits), ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತೀಯ ಶಕ್ತಿ ವಿನ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ (Electro-magnetic energy distribution), ಅನುಕಲನ ಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿ (Limits of Integration), ಹಲವಾರು ಮೂಲಕಣಗಳ (Fundamental Particles) ಗುರುತಿಗಾಗಿ, ಗ್ರಹಗಳ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ, ಪರಮಾಣುವಿನ ಕಣಗಳ ಚಲನೆ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ, ವ್ಯೋಮಯಾನದ ಗುರಿ, ಪಥಗಳ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಪೈ ಪಾತ್ರ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪೈನ ಉಪಯೋಗದ ವ್ಯಾಪಕತೆಯ ಬಗೆಗಿನ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಘಟನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞ ಡೀ ಮಾರ್ಗನ್‌ರವರು, (1850), ಒಮ್ಮೆ ತಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರಾದ 'ವಿಮಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ'ರೊಬ್ಬರೊಡನೆ (Actuary) ಮಾತನಾಡುತ್ತಾ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾಲವೊಂದರಲ್ಲಿ ಜೀವಂತರಾಗಿರಬಹುದಾದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪೈ ಸಂಕೇತವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸೂತ್ರವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿದರಂತೆ! ವೃತ್ತದ ಸೋಂಕೂ ಇಲ್ಲದ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪೈನ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಅವರ ಮಿತ್ರರು ಆಶ್ಚರ್ಯದಿಂದ ಉದ್ಗಾರ ತೆಗೆದರಂತೆ! ಪೈನ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಈ ಘಟನೆ, ಪೈ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ವಿಜ್ಞಾನದ ಸಮಸ್ತ ಪ್ರಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಇಲ್ಲವೇ ಅಪರೋಕ್ಷ

ವಾಗಿ ಕಾಣಬರುವ ಈ ಸಂಕೇತ, ವ್ಯಾಪಕತೆಯು ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಬಹುಶಃ ಅದ್ವಿತೀಯವಾದುದು. ಅನಾದಿಕಾಲದಿಂದಲೂ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಕುತೂಹಲವನ್ನು ಕೆರಳಿಸಿ, ಹಲವಾರು ಕಠಿಣ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನೊಡ್ಡಿ, ಅವರ ಸುಪ್ತ ಪ್ರತಿಭೆಗೆ, ನಿಶಿತ ಕಲ್ಪನೆಗೆ ಸವಾಲಾಗಿ, ಆ ಮೂಲಕ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಕಾರಣವಾದ ಪೈ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅತ್ಯಮೂಲ್ಯ, ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಸಂಕೇತಗಳಲ್ಲೊಂದು. ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ $\pi$ ಸ್ಥಾನ ಅಪೂರ್ವ, ಉಪಯೋಗ ಅಸಂಖ್ಯ, ಅರ್ಥ ಅಪಾರ.

## ಅನುಬಂಧ-೧

# ನಮಸ್ಕಾರ ಮುದ್ರಾ*

**ಡಾ॥ ದ. ರಾ. ಬೇಂದ್ರೆ**

. . . . . ಕೈ ಬೆರಳು ಜೋಡಿಸಿ ನಮಸ್ಕಾರ ಮುದ್ರೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಒಂದು ಅದ್ವಿತೀಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಯೋಜನೆ ಆಗುವುದು. ಕನಿಷ್ಠಿಕಾ (ಕಿರಿಬೆರಳು) ಅನಾಮಿಕಾ, ಮಾಧ್ಯಮಾ, ತರ್ಜನಿ, ಅಂಗುಷ್ಠ (ಹೆಬ್ಬೆರಳು) ಇವುಗಳಿಗೆ ೧, ೨, ೩, ೪, ೫, ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಮುಂದೆ ಎಡಗೈ ಹೆಬ್ಬೆರಳಿನಿಂದ ಕಿರುಬೆರಳಿನವರೆಗೆ ೬, ೭, ೮, ೯, ೧೦ ಈ ಕ್ರಮ ಪ್ರಾಪ್ತ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ – ನಮಸ್ಕಾರ ಮುದ್ರೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಹತ್ತಿಕೊಂಡ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆಗೂ ಹನ್ನೊಂದು ಎಂಬ ರುದ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಭಾಜ್ಯ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಇರುವುದೇ ಇಲ್ಲಿಯ ವಿಶೇಷ ವಾಗಿದೆ. ಹನ್ನೊಂದು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯವೇ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಐದಕ್ಕೆ ಐದು ಕೂಡಿದಾಗ ಹತ್ತು ಆಗುವುದಲ್ಲದೆ ೫೫ರ ಮೊತ್ತವೂ ಆಗುತ್ತದೆ. ಐದು ಬೆರಳಿನ ಬದಿಗೆ ಐದು ಬೆರಳು–ಅಂಜಲಿ ಮುದ್ರೆ ಮಾಡಿದಾಗ ವೈದಿಕ ಸಾಂಪ್ರದಾಯದಲ್ಲಿ ವಸು, ರುದ್ರ, ಆದಿತ್ಯ, ಇಂದ್ರ, ಪ್ರಜಾಪತಿ, ಕೂಡಿ ಮೂವತ್ತುಮೂರು ದೇವತೆಗಳು (ಬೃಹದಾರಣ್ಯಕದಲ್ಲಿ ಯಾಜ್ಞವಲ್ಕ್ಯರು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ) ನಿರುಕ್ತ ದೇವತಾ ಕಾಂಡದಲ್ಲಿ ದ್ಯಾವಾ, ಪೃಥ್ವಿ, ಅಂತರಿಕ್ಷಾ – ಒಂದೊಂದು ಹನ್ನೊಂದು ; ಮೂರೂ ಕೂಡಿ ಮೂವತ್ತು ಮೂರು. ಪ್ರಾಚೀನ ನಿಮಿತ್ತುಗಳಿಂದ ಇದು ನಿಯಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆ. ೫೫ರಲ್ಲಿ ೩೩ ಕಳೆದರೆ ಉಳಿದ ೨೨ – ಸ, ರಿ, ಗ, ಮ, ಪ, ದ, ನಿ, ಈ ಏಳು ಸ್ವರಗಳಿಗೆ ೨೨ ಮಾತ್ರೆ. **II Constant** ಈ ನಿಯತ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{22}{7}$. ವೈದಿಕ ವಿಷ್ಣು ಸೂಕ್ತದಲ್ಲಿ ತ್ರಿವಿಕ್ರಮ ಶಿಪಿವಿಷ್ಟ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಐದು ಬೆರಳಿಗೆ ಐದು ಬೆರಳು ಹಚ್ಚಿ ನಮಸ್ಕಾರ ಮುದ್ರೆ ರಚಿಸಿದಾಗ – ಶ್ರುತಿ ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ದೇವತಾಕೋಟಿಗೆ ನಮಸ್ಕರಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ . . . . . . ನಮ್ಮ ಕೈ ಎರಡೂ ನಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ ಇದೆ. ಆದರೆ ಮನಸ್ಸು ಎತ್ತೆತ್ತೊ ಸುತ್ತಾಡುತ್ತದೆ. ತ-ಥ-ದ-ಧ-ನ ಒಂದು ಕೈ ಬೆರಳಿಗೂ ಪ-ಫ-ಬ-ಭ-ಮ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೂ ಸಂಕೇತವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿದಾಗ ಕಿರುಬೆರಳು, ಹೆಬ್ಬೆರಳುಗಳಿಗೆ– ತಪ, ನಮ ಕೊಡುತ್ತವೆ. ನಮಸ್ಕಾರ ಇದು ತಪ, ತದ್ವಿರುದ್ಧವಾದರೆ, ಮನ ಬಂದಂತೆ ಹೋದರೆ ಪತ – ಪಾತ. . . . . . .

---

* ಈ ಭಾಗವನ್ನು ಡಾ॥ ದ. ರಾ. ಬೇಂದ್ರೆಯವರ 'ಸಾಹಿತ್ಯದ ವಿರಾಟ್ ಸ್ವರೂಪ' (ಪುಟ ೧೦೨೭, ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ, ೧೯೭೪) ಗ್ರಂಥದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ

–ಸಂ.

# ಪರಿಶಿಷ್ಟ

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಹಲವು ಪದಗಳ ಮತ್ತು ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಪರ್ಯಾಯ ಪದಗಳ ಅಕಾರಾದಿ ಪಟ್ಟಿ.

| | |
|---|---|
| **ಅ** | |
| ಅಕ್ಷ | Axis |
| ಅಣು | Molecule |
| ಅರ್ಧವೃತ್ತ | Semi-Circle |
| ಅನುಕಲನ | Integration |
| ಅನುವಂಶೀಯತೆ | Heredity |
| ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ) | Irrational Number |
| ಅಬೀಜೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ | Transcedental Number |
| **ಆ** | |
| ಆಕೃತಿ | Figure |
| ಆಯತ | Rectangle |
| ಆವರ್ತಕಾಲ | Period |
| ಆವರ್ತಾಂಕ | Frequency |
| **ಓ** | |
| ಓರೆ | Inclined |
| **ಕ** | |
| ಕಂಸ | Arc |
| ಕಣ | Particle |
| ಕೇಂದ್ರ | Centre |
| ಕೈವಾರ | Compass |
| **ಗ** | |
| ಗಾತ್ರ | Volume |
| ಗುಣಕ | Coefficient |
| **ಘ** | |
| ಘನ | Cube |

| | |
|---|---|
| **ಚ** | |
| ಚತುರ್ಭುಜ | Quadrilateral |
| ಚಲನೆ | Motion |
| ಚೈತನ್ಯ | Energy |
| ಚೌಕ | Square |
| **ಜ** | |
| ಜ್ಯಾ | Chord |
| ಜ್ಯಾಮಿತಿ | Geometry |
| **ತ** | |
| ತರ್ಕ | Logic |
| ತತ್ವ | Principle |
| ತರಂಗ | Wave |
| ತಪ್ಪು | Error |
| ತ್ರಿಕೋನ | Triangle |
| ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ | Trignometry |
| ತ್ರಿಜ್ಯ | Radius |
| **ದ** | |
| ದಶಭುಜ | Decagon |
| ದಶಮಾಂಶ | Decimal |
| ದಾಮಾಶಯ | Ratio |
| ದೀರ್ಘವೃತ್ತ | Ellipse |
| **ನ** | |
| ನೇರ ಅಂಚು | Straight Edge |
| ನಿಯಾಮಕ | Control |
| **ಪ** | |
| ಪರಮಾಣು | Atom |
| ಪೂರ್ಣಾಂಕ | Integer |
| ಪ್ರಮಾಣ | Ratio |
| ಪ್ರಮೇಯ | Theorem |
| ಪ್ರವಾಹಮಾರ್ಗ | Circuit |
| ಪಂಚಭುಜ | Pentagon |
| **ಬ** | |
| ಬಹುಭುಜ | Polygon |
| ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ | Rational number |
| ಬೆಲೆ | Value |
| ಬೀಜೀಯ | Algebraic |
| ಬಿಂದು | Point |
| **ಮ** | |
| ಮಣಿ ಚೌಕಟ್ಟು | Abacus |
| ಮಧ್ಯವರ್ತಿ | Medium |
| ಮಿತಿ | Limit |
| ಮೌಲ್ಯ | Value |
| **ರ** | |
| ರೇಖಾಗಣಿತ | Geometry |
| **ಲ** | |
| ಲೋಲಕ | Pendulum |
| **ವ** | |
| ವಕ್ರರೇಖೆ | Curve, Curved line |
| ವರ್ಗ | Square |
| ವರ್ಗಮೂಲ | Square root |
| ವರ್ತುಲಕಾಂಡ (ವರ್ತುಲ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ) | Cylinder |
| ವಸ್ತು | Matter |
| ವ್ಯಾಸ | Diameter |
| ವಿಸ್ತೀರ್ಣ | Area |
| ವೃತ್ತ | Circle |
| ವೃತ್ತೀಯ ಚಲನೆ | Circular motion |

| | |
|---|---|
| ವೃತ್ತಚತುರ್ಥಾಂಶ | Quadrant |
| ವ್ಯೋಮಯಾನ | Space travel |

**ಶ**

| | |
|---|---|
| ಶೋಧಕ | Filter |

**ಸ**

| | |
|---|---|
| ಸಂಬಂಧ | Relation |
| ಸಂಭವನೀಯತೆ | Probability |
| ಸಂವೃತ್ತ | Closed |
| ಸಮ | Equal, Regular |
| ಸಮತಲ | Plane |
| ಸಮೀಕರಣ | Equation |
| ಸರಳಸಂಗತ ಚಲತೆ | Simple Harmonic Motion |
| ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿ | Cylinder |
| ಸಾದೃಶ | Similar |
| ಸಿದ್ಧಾಂತ | Theory (Inference) |
| ಸ್ಥಿರಾಂಕ | Constant |
| ಸುತ್ತಳತೆ | Perimeter |
| ಸುಲಭೀಕರಣ | Simplification |
| ಸೂತ್ರ | Formula |

# ಗ್ರಂಥಸೂಚಿ



| | ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಸರು | ಲೇಖಕರ ಹೆಸರು | ಪ್ರಕಟಣೆಯ ವರ್ಷ |
|---|---|---|---|
| 1 | Encyclopedea Britannica | | |
| 2 | Encyclopedia Americana | | |
| 3 | Mc Graw-Hill Encyclopedea of Science & Technology | | |
| 4 | Mathematics for the Million | Lancelot Hogbem | |
| 5 | Elementary Mathematics for teachers | Brumficle-Krause | 1969 |
| 6 | Introduction to Mathematics | Frank M. Hudson<br>Donald W. Adlong | 1970 |
| 7 | Mathematical Puzzles and Pastimes | Aaron Bakst | 1954(ಪ್ರ.ಮು.)<br>1963(ದ್ವಿ.ಮು.) |
| 8 | Dictionary of Mathematics | T. Alaric Millington<br>William Millington | 1966(ಪ್ರ.ಮು.)<br>1971(ದ್ವಿ.ಮು.) |
| 9 | The New Mathematics dictionary & hand book | Robert W. Marks | 1964 |

| | ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಸರು | ಲೇಖಕರ ಹೆಸರು | ಪ್ರಕಟಣೆಯ ವರ್ಷ |
|---|---|---|---|
| 10 | Contemporary Geometry | John. F. Schacht<br>Roderick C. Mc Lennan<br>Alice L. Griswold | 1962 |
| 11 | Exploring modern Mathematics (Volumes 2 and 3) | Keddy, Jameson, Johnson | 1963<br>1964 |
| 12 | Extension of the number Concept (The Scripta Mathematica Studies–Number Ten | Abraham A. Fraenkel | 1964 |
| 13 | A Short Account of History of Mathematics | W.W.Rouse Ball | 1960 |
| 14 | The Language of Mathematics | Frank Land | 1960 |
| 15 | Elements of Data Processing Mathematics | Wilson T. Price<br>Merlin Miller | 1967(ಪ್ರ.ಮು.)<br>1970(ದ್ವಿ.ಮು.) |
| 16 | 'On $\pi$' (Article from 'Science Reporter') | S. C. Anand | Feb, 1969 |
| 17 | Mathematics–Its Magic and Mastery | Aaron Bakst | 1941(ಪ್ರ.ಮು.)<br>1952(ದ್ವಿ.ಮು.) |
| 18 | The Main Stream of Mathematics | Edna E. Kramer | 1955 |
| 19 | Mathematics for the General Reader | E.C.Titchmarsh | |
| 20 | Mathematics in Human Affairs | Kokomoor | 1953(10ನೇ ಮು.) |
| 21 | Through the Mathescope | C. Stanley Ogilvy | 1953 |

| | ಪುಸ್ತಕದ ಹೆಸರು | ಲೇಖಕರ ಹೆಸರು | ಪ್ರಕಟನೆಯ ವರ್ಷ |
|---|---|---|---|
| 22 | Mathematical Recreations and Essays | W.W.Rouse Ball | 1939(11ನೇ ಮು.) |
| 23 | The Works of Archimedes | Edited by T.L. Heath | 1912 |
| 24 | 'LiLavathi' | Bhaskaracharya Translated into English by Colebrooke | 1967 |
| 25 | Mathematical Entertainments | M. H. Greenblatt | 1965 |
| 26 | ಜ್ಞಾನಗಂಗೋತ್ರಿ–ಭೌತಜಗತ್ತು | | |
| 27 | 'ಸಾಹಿತ್ಯದ ವಿರಾಟ್ ಸ್ವರೂಪ' | ದ. ರಾ. ಬೇಂದ್ರೆ | 1974 |

ಶ್ರೀ ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿಯವರ ಹೆಸರು ಸುಧಾ, ಪ್ರಜಾವಾಣಿ ಮುಂತಾದ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಓದುವ ಅಭ್ಯಾಸ ಇರುವವರಿಗೆ ಅಪರಿಚಿತವಲ್ಲ. ವಿಜ್ಞಾನ-ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ದಿನದಿನ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಪ್ರಗತಿಯ ವರದಿಗಾರರಾಗಿ ಅವರು ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಾತ್ರ ಮಹತ್ವದ್ದು.

ರ್‍ಯಾಂಕುಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಜೀವನವನ್ನು ಮುಗಿಸಿ ಬೆಂಗಳೂರು ಜಯನಗರದ ನ್ಯಾಷನಲ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿರುವ ಶ್ರೀಯುತರು ವಿಜ್ಞಾನ-ಸಾಹಿತ್ಯಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಅರ್ಹರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ '$\pi$' ಅನ್ನು ಕುರಿತು, ಅನೇಕ ವಿಸ್ಮಯಕರ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳುವ ಈ ಪುಸ್ತಿಕೆ ಸ್ವಾಗತಾರ್ಹ.

ಕನ್ನಡ ಸಂಘ ಕ್ರೈಸ್ಟ್ ಕಾಲೇಜ್ ಬೆಂಗಳೂರು